

Generalizaciones de la Ecuación de Laplace desde el Análisis de Clifford

Serrano-Ricardo, José-Luis ^{1,*} ; Alfonso-Santiesteban, Daniel ¹ ; Abreu-Blaya, Ricardo ¹ 

¹Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas, Chilpancingo, México.

Resumen: El Análisis de Clifford brinda la posibilidad de reescribir muchas de las ecuaciones de la Física Matemática para obtener valiosas interpretaciones acerca de sus soluciones. La ausencia de la conmutatividad y el uso de bases ortonormales arbitrarias en álgebras de Clifford hacen posible el surgimiento de dos nuevas ecuaciones diferenciales que generalizan a la clásica ecuación de Laplace. Las funciones (φ, ψ) -armónicas y (φ, ψ) -inframonogénicas se definen como las soluciones a estas ecuaciones más generales. En este trabajo, se estudiarán estas clases funcionales y se mostrará que no comparten algunas de las buenas propiedades de las armónicas. Además, por medio de transformadas de Teodorescu se resolverán problemas de frontera del tipo Riemann-Hilbert en dominios con frontera fractal y sobre clases de Lipschitz de orden superior. Como conclusión, se determina que la consideración de conjuntos estructurales brinda la posibilidad de agrupar y tratar de forma eficiente a estos sistemas elípticos junto con sus problemas asociados.

Palabras clave: análisis de Clifford; funciones (φ, ψ) -armónicas; funciones (φ, ψ) -inframonogénicas; problemas de Riemann-Hilbert

Generalizations of Laplace equation in Clifford analysis

Abstract: Clifford analysis gives the possibility of rewriting many of the equations of mathematical physics to obtain valuable interpretations of their solutions. The absence of commutativity and the use of arbitrary orthonormal bases in the so-called Clifford algebras lead to new differential equations that generalize the classical Laplace equation. The (φ, ψ) -harmonic and (φ, ψ) -inframongenetic functions are defined as the solutions to these general equations. This research will study these functional classes and show that they do not share some of the good properties of the harmonic ones. In addition, by means of Teodorescu transforms, Riemann-Hilbert type boundary value problems in domains with fractal boundary and on higher order Lipschitz classes are solved. It is concluded that the consideration of structural sets offers the possibility of efficiently grouping and treating these elliptic systems together with their associated problems.

Keywords: Clifford analysis; (φ, ψ) -harmonic functions; (φ, ψ) -inframongenetic functions; Riemann-Hilbert problems

1. INTRODUCCIÓN

Una forma elegante de generalizar la teoría de funciones holomorfas del plano complejo a dimensiones superiores es haciendo uso del Análisis de Clifford, que en su versión original se centra en el estudio de las llamadas funciones monogénicas (Brackx et al., 1982). Dichas funciones son las soluciones nulas del clásico operador de Dirac sobre un fibrado espinorial del espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$. Esta teoría de funciones es esencialmente un refinamiento del Análisis Armónico, debido a que el operador de Dirac factoriza al Laplaciano mediante el uso de las álgebras de Clifford.

Las álgebras de Clifford fueron introducidas en 1878 por el matemático inglés William Kingdon Clifford (1845-1879) y constituyen una generalización multidimensional de los números complejos. Estas permiten reinterpretar y manipular algebraicamente muchos conceptos geométricos de importancia, lo cual ha posibilitado numerosas aplicaciones dentro de la Física Teórica, la Computación y la Geometría (Gürlebeck et al., 2016).

Estas álgebras tienen su origen en los cuaterniones de Hamilton. Fue en 1843 cuando el irlandés William Rowan Hamilton, en un intento de introducir un análogo tridimensional del álgebra de los números complejos, introdujo los conocidos cuaternios reales (Hamilton, 1866). Alrededor del año 1830, varios matemáticos se percataron de que el álgebra de los números complejos se suplantaba trabajando con vectores del plano y entonces Hamilton se preguntó si un análogo espacial podría ser obtenido de modo que las rotaciones en $\mathbb{R}^3$ también fuesen relacionadas directamente por vectores sobre el álgebra. Él estableció que sus nuevos números debían poseer cuatro componentes reales y la propiedad conmutativa de la multiplicación debía ser sacrificada. Posteriormente, esta nueva álgebra fue denotada por $\mathbb{H}$ y sus elementos fueron llamados cuaternios o cuaterniones. Años más tarde, Clifford utilizó como base el trabajo preliminar del alemán Hermann Grassmann para crear lo que hoy se conoce como álgebra geométrica, siendo un caso particular las álgebras de Clifford (Clifford, 1878).

El operador de Dirac sobre el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$ es definido

*danielalfonso950105@gmail.com

Recibido: 01/08/2024

Aceptado: 18/03/2025

Publicado en línea: 31/05/2025

10.33333/rp.vol55n2.04

CC BY 4.0

por

$$\partial_{\underline{x}} = \sum_{j=1}^m e_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (1)$$

donde $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ es la base estándar de $\mathbb{R}^m$. A lo largo de este trabajo, asumiremos que $m \geq 3$. Este operador de Dirac factoriza el Laplaciano en el sentido de que: $\partial_{\underline{x}}^2 = -\Delta$. Si se considera ahora el conjunto $\psi = \{\psi_1, \dots, \psi_m\} \subset \mathbb{R}^m$ y el operador diferencial

$$\psi \partial_{\underline{x}} = \sum_{j=1}^m \psi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2)$$

entonces $\psi \partial_{\underline{x}}^2 = -\Delta$ si y solo si ψ representa una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$ (Nôno & Inenaga, 1987). Debido a Shapiro y Vasilevski, este conjunto ψ es llamado conjunto estructural (Shapiro & Vasilevski, 1995). La flexibilidad introducida por los conjuntos estructurales ayuda a visualizar nuevas perspectivas dentro de la investigación concerniente a transformadas de Ahlfors-Beurling, $\bar{\partial}$ -problemas y descomposiciones aditivas de funciones armónicas (Gürlebeck & Nguyen, 2014). La consideración de conjuntos estructurales arbitrarios, ψ y ϕ , permite el surgimiento de dos nuevas ecuaciones elípticas que generalizan a la ecuación de Laplace:

$$\phi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} f = 0 \quad (3)$$

y

$$\phi \partial_{\underline{x}} f \psi \partial_{\underline{x}} = 0, \quad (4)$$

cuyas soluciones han sido referenciadas como (ϕ, ψ) -armónicas y (ϕ, ψ) -inframonogénicas, respectivamente (Alfonso et al., 2022a; Serrano et al., 2021). Es de resaltar que estas funciones constituyen clases no triviales de funciones biarmónicas. En particular, cuando $\phi = \psi = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, la Ecuación (3) se reduce a la ecuación de Laplace; mientras que la Ecuación (4) puede ser vista como una versión no conmutativa de esta, cuyas soluciones reciben el nombre de inframonogénicas (Malonek et al., 2010). Estas funciones han sido relacionadas con el sistema de Lamé-Navier de la Elasticidad Lineal, problemas de frontera de tipo Riemann-Hilbert y descomposiciones de Fischer para el espacio de polinomios homogéneos de $\mathbb{R}^m$ (Alfonso et al., 2022b; Serrano et al., 2022; Moreno & Delgado, 2024). En el presente artículo, se pretende mostrar algunos resultados característicos de estas funciones y sus estructuras disímiles respecto de las armónicas. Además, se considerarán problemas de frontera del tipo Riemann-Hilbert sobre dominios con frontera fractal.

2. METODOLOGÍA

Los métodos de investigación utilizados en el desarrollo de este trabajo estuvieron determinados por los objetivos y las tareas de investigación. A nivel teórico se emplearon los métodos: histórico lógico, análisis y síntesis, inducción y deducción, y a nivel empírico: el experimental y la modelación; todos de gran utilidad en el estudio de fuentes de información y en el procesamiento de los fundamentos científicos. Se hace necesario el uso de un cuerpo teórico enfocado a la resolución de los problemas de frontera abordados que, a grandes rasgos, incluye a la transformada de Cauchy multidimensional, la extensión de Whitney de funciones Hölder continuas sobre conjuntos compactos y algunas herramientas propias de la Geometría Fractal.

3. NOCIONES PRELIMINARES DE ANÁLISIS DE CLIFFORD

El álgebra de Clifford real $\mathbb{R}_{0,m}$ se define como la generada por $e_1, e_2, \dots, e_m$ según las reglas de multiplicación

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{i,j},$$

donde $\delta_{i,j}$ es la conocida delta de Kronecker.

Los elementos de $\mathbb{R}_{0,m}$ tienen una única representación de la forma siguiente:

$$a = \sum_{A \subseteq \{1,2,\dots,m\}} a_A e_A,$$

donde $a_A \in \mathbb{R}$, $e_A = e_{h_1} e_{h_2} \cdots e_{h_k}$ para $A = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ con $1 \leq h_1 < h_2 < \cdots < h_k \leq m$ y $e_\emptyset = e_0 = 1$.

El espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$ está inmerso en $\mathbb{R}_{0,m}$ al identificar a

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$$

con $\underline{x} = \sum_{i=1}^m x_i e_i$. El subespacio de s -vectores ($0 \leq s \leq m$) se denotará por $\mathbb{R}_{0,m}^{(s)}$ y es definido por

$$\mathbb{R}_{0,m}^{(s)} := \text{span}_{\mathbb{R}}(e_A : |A| = s).$$

El álgebra de Clifford puede también ser descompuesta según la proyección sobre los subespacios de s -vectores:

$$\mathbb{R}_{0,m} = \bigoplus_{s=0}^m \mathbb{R}_{0,m}^{(s)}.$$

La proyección asociada a la parte s -vectorial se denotará por $[\cdot]_s$. Cada elemento $x = (x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ puede ser reescrito también como

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^m x_i e_i \in \mathbb{R}_{0,m}^{(0)} \oplus \mathbb{R}_{0,m}^{(1)}$$

y es llamado paravector.

La conjugación (cliffordiana) es un antiautomorfismo definido por las relaciones $\bar{e}_i = -e_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Por tanto,

$$\bar{e}_A = (-1)^k e_{h_k} \cdots e_{h_1} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} e_A.$$

Todas las propiedades necesarias de estas álgebras pueden encontrarse en los libros de Gilbert & Murray (1991); Brackx et al. (1982); Gürlebeck et al. (2008, 2016). Algunas notas históricas de interés, apuntes necesarios y diversos puntos de vista acerca del Análisis de Clifford pueden consultarse en Liu & Hong (2018); Malonek et al. (2011); Delanghe & Bory (2003); Delanghe (1970, 2001); Cnops (1995); Ryan (2000, 2004); Reséndis & Shapiro (2000).

Consideraremos funciones $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{0,m}$, las cuales puedan ser escritas como $f(\underline{x}) = \sum_A f_A(\underline{x}) e_A$, donde f_A son funciones reales. Propiedades como la continuidad, la diferenciabilidad y la integrabilidad tienen el usual sentido a través de todas sus componentes reales, o sea, una función será continua si todas sus componentes reales lo son. En particular, los espacios de funciones k -veces continuamente diferenciables y k -veces α -Hölder continuamente diferenciables sobre un dominio Ω serán denotados por $C^k(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ y $C^{k,\alpha}(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$, respectivamente. A partir

de este momento, y a menos que se diga lo contrario, los dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ se considerarán abiertos y simplemente conexos con frontera Γ suficientemente suave.

Como se mencionó en la introducción, un conjunto estructural es una base ortonormal de $\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}_{0,m}^{(1)}$:

$$\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_m\},$$

y según las reglas de multiplicación se tendrá también que

$$\psi_i \psi_j + \psi_j \psi_i = -2\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m).$$

Algunas nociones esenciales sobre conjuntos estructurales pueden consultarse en Nôno & Inenaga (1987); Shapiro (1997).

En el espacio $C^1(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ es posible definir un operador de Dirac generalizado como:

$$\psi \partial_{\underline{x}} := \psi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \psi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \psi_m \frac{\partial}{\partial x_m}.$$

Para el caso particular del conjunto estructural estándar

$$\psi_{st} := \{e_1, e_2, \dots, e_m\},$$

el operador $\psi \partial_{\underline{x}}$ se convierte en el tradicional operador de Dirac cliffordiano $\partial_{\underline{x}}$. La ortonormalidad del conjunto estructural provoca la factorización del Laplaciano mediante el operador $\psi \partial_{\underline{x}}$. Una función se dice que es ψ -hiperholomorfa por la izquierda (derecha) en el dominio Ω si $\psi \partial_{\underline{x}} f = 0$ ($f \psi \partial_{\underline{x}} = 0$) en Ω . Las funciones ψ -hiperholomorfas son la extensión de las funciones holomorfas a altas dimensiones y el operador de Dirac tiene el mismo rol del operador de Cauchy-Riemann en Análisis Complejo.

Se puede definir además una transformada de Cauchy generalizada

$$\mathcal{C}_\psi f(\underline{x}) := \int_\Gamma K_\psi(\underline{y} - \underline{x}) n_\psi(\underline{y}) f(\underline{y}) d\underline{y},$$

con núcleo de Cauchy

$$K_\psi(\underline{x}) = \psi \partial_{\underline{x}} \left[\frac{|\underline{x}|^{2-m}}{\sigma_m(m-2)} \right],$$

donde σ_m denota al área superficial de la bola unitaria en $\mathbb{R}^m$ y $n_\psi(\underline{y}) = \sum_{i=1}^m n_i(\underline{y}) \psi_i$, siendo $n_i(\underline{y})$ la i -ésima componente del vector normal unitario en $\underline{y} \in \Gamma$. Aquí la función

$$\frac{|\underline{x}|^{2-m}}{\sigma_m(m-2)}$$

es la solución fundamental del Laplaciano que denotaremos por $E_1(\underline{x})$. Cuando la función es ψ -hiperholomorfa por la izquierda entonces obtendremos la representación integral de Cauchy siguiente:

$$f(\underline{x}) = \mathcal{C}_\psi f(\underline{x}).$$

La solución fundamental del operador de segundo orden $\psi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}}(\cdot)$ será:

$$\begin{aligned} K_{\psi\psi}(\underline{x}) &:= \psi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} \left[\frac{|\underline{x}|^4}{\sigma_m(2-m)(4-m)} \right] \\ &= \frac{(2-m)|\underline{x}|^{-m} \underline{x} \psi \underline{x} \phi + |\underline{x}|^{2-m} \sum_{i=1}^m \psi_i \phi_i}{2\sigma_m(2-m)}. \end{aligned}$$

Esta solución fundamental permite también obtener una fórmula de representación para las funciones $f(\underline{x})$ que anulan al operador $\psi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}}(\cdot)$ en Ω , y que como mencionamos en la introducción, reciben el nombre de (ϕ, ψ) -armónicas:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &= \int_\Gamma K_\psi(\underline{y} - \underline{x}) n_\psi(\underline{y}) f(\underline{y}) d\underline{y} \\ &\quad + \int_\Gamma K_{\phi\psi}(\underline{y} - \underline{x}) n_\phi(\underline{y}) [\psi \partial_{\underline{y}} f(\underline{y})] d\underline{y}. \end{aligned} \quad (5)$$

Remitimos al lector al trabajo precedente de Bory et al. (2016).

Para las funciones (ϕ, ψ) -inframonogénicas también existe una fórmula integral de tipo Cauchy debida a Alfonso et al. (2022a), la cual tiene como expresión:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &= \int_\Gamma f(\underline{y}) n_\psi(\underline{y}) K_\psi(\underline{y} - \underline{x}) d\underline{y} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\int_\Gamma K_\phi(\underline{y} - \underline{x}) n_\phi(\underline{y}) [f(\underline{y}) \psi \partial_{\underline{y}}] (\underline{y}_\psi - \underline{x}_\psi) d\underline{y} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m \phi_i \left(\int_\Gamma E_1(\underline{y} - \underline{x}) [f(\underline{y}) \psi \partial_{\underline{y}}] d\underline{y} \right) \psi_i \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Sea k un entero no negativo y $0 < \alpha < 1$. Las clases de Lipschitz de orden superior $\text{Lip}(k + \alpha, \Gamma)$ consisten de colecciones de funciones continuas reales

$$\mathbf{f} := \{f^{(\mathbf{j})}, |\mathbf{j}| \leq k\} \quad (7)$$

definidas en Γ y que satisfacen las condiciones de compatibilidad siguientes:

$$\left| f^{(\mathbf{j})}(\underline{x}) - \sum_{|\mathbf{j}+\mathbf{l}| \leq k} \frac{f^{(\mathbf{j}+\mathbf{l})}(\underline{y})}{\mathbf{l}!} (\underline{x} - \underline{y})^{\mathbf{l}} \right| = \mathcal{O}(|\underline{x} - \underline{y}|^{k+\alpha-|\mathbf{j}|}), \quad (8)$$

donde $\underline{x}, \underline{y} \in \Gamma$ y $|\mathbf{j}| \leq k$. Aquí $\mathbf{j}$ es un multiíndice m -dimensional y se utilizarán las notaciones comúnmente relacionadas con estos. Para más detalles puede verse Stein (1970). El matemático norteamericano Hassler Whitney probó en 1934 que tal colección de funciones puede ser extendida mediante una función Hölder continua diferenciable hasta el orden k y con exponente α , resolviendo así uno de los principales problemas de Análisis de la época (Whitney, 1934). En este contexto del Análisis de Clifford, el teorema de extensión de Whitney toma la forma siguiente para $k = 1$:

Teorema 3.1 (Teorema de Whitney). *Sea $f = \{f^{(\mathbf{j})}, |\mathbf{j}| \leq 1\} \in \text{Lip}(1 + \alpha, \Gamma)$. Entonces, existe una función de soporte compacto $\tilde{f} \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{0,m})$ que satisface las siguientes condiciones:*

- $\tilde{f}|_\Gamma = f^{(0)}, \quad \partial^{(\mathbf{j})} \tilde{f}|_\Gamma = f^{(\mathbf{j})}, |\mathbf{j}| = 1,$
- $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \Gamma),$
- $|\partial^{(\mathbf{j})} \tilde{f}(\underline{x})| \leq c[\text{dist}(\underline{x}, \Gamma)]^{\alpha-1}, \text{ para } |\mathbf{j}| = 2 \text{ y } \underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \Gamma.$

Demostración. Se presentarán solo las ideas esenciales de la prueba de este resultado clásico en el contexto del Análisis de Clifford. Primeramente, usemos la representación de f a través de sus componentes reales:

$$f = \sum_{A \subseteq \{1, 2, \dots, m\}} f_A e_A,$$

para luego tomar estas componentes f_A y aplicar el teorema de extensión para funciones reales (Stein, 1970). Obviamente, se logra el resultado en Análisis de Clifford si se considera

$$\tilde{f} = \sum_{A \subseteq \{1,2,\dots,m\}} \tilde{f}_A e_A.$$

Se descompone Γ^c en una partición de cubos cerrados Q_i , y denotamos φ_i^* a la función indicadora del cubo i -ésimo. Para construir la extensión $\tilde{f}$ se considera $\tilde{f} = f$ para $\underline{x} \in \Gamma$ y además en Γ^c se define $\tilde{f} = \sum^* P(\underline{x}, p_i) \varphi_i^*(\underline{x})$, donde p_i es un punto tal que $\text{dist}(Q_i, \Gamma) = \text{dist}(Q_i, p_i)$ y $P(\underline{x}, y)$ denota el polinomio en $\underline{x}$ de la expansión de Taylor de f alrededor del punto $y \in \Gamma$, o sea

$$P(\underline{x}, y) = \sum_{|l| \leq 1} \frac{f^{(l)}(y)(\underline{x} - y)^l}{l!}.$$

El símbolo $\sum^*$ indica que la suma se toma solo sobre los cubos cuya distancia a Γ no sea mayor que 1.

Debido a que las funciones $f^{(j)}$ pertenecen a la clase $\text{Lip}(1 + \alpha, \Gamma)$, podemos arribar a la siguiente descomposición:

$$f^{(j)} = P_j(\underline{x}, y) + R_j(\underline{x}, y),$$

donde $P_j(\underline{x}, y) = \sum_{|l| \leq 1} \frac{f^{(j+l)}(y)(\underline{x} - y)^l}{l!}$. Los restos $R_j(\underline{x}, y)$ son los que satisfacen la acotación (8). Mediante un laborioso cálculo, se obtiene

$$P(\underline{x}, b) - P(\underline{x}, a) = \sum_{l \leq 1} R_l(b, a) \frac{(\underline{x} - b)^l}{l!},$$

y de manera más general

$$P_j(\underline{x}, b) - P_j(\underline{x}, a) = \sum_{j+l \leq 1} R_{j+l}(b, a) \frac{(\underline{x} - b)^l}{l!}.$$

El uso de las anteriores relaciones junto con un análisis exhaustivo de varios aspectos geométricos permite concluir la demostración del teorema. También en la demostración, se evidencia la importancia de la suma $\sum^*$ en lugar de $\sum$ para lograr las acotaciones deseadas. Remitimos al lector a Stein (1970), donde puede encontrar todos los detalles de esta prueba en un cúmulo de más de 10 páginas. $\square$

4. FUNCIONES (φ, ψ) -ARMÓNICAS

La clase de funciones (φ, ψ) -armónicas sobre Ω es comúnmente denotada por la simbología: $\mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ (Serrano et al., 2021). En un contexto más general, se remite al lector al trabajo de Bory et al. (2016), en el cual se abordan ecuaciones diferenciales de orden superior asociadas a un número finito de conjuntos estructurales diferentes.

El Laplaciano Δ es el ejemplo por excelencia de un operador (fuertemente) elíptico, mientras que el operador $\varphi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}}(\cdot)$ pese a ser elíptico, no lo es fuertemente. Este hecho se puede inferir mediante el siguiente ejemplo que viola el principio del módulo máximo.

Ejemplo 4.1. Sea m par y considere un conjunto estructural arbitrario

$$\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}, \varphi_m\},$$

ahora tómesese el siguiente conjunto

$$\psi = \{\varphi_2, \varphi_1, \dots, \varphi_m, \varphi_{m-1}\}.$$

La función escalar

$$u(\underline{x}) = 1 - \sum_{i=1}^m x_i^2$$

naturalmente, se hace cero en la superficie de la bola unitaria $B(0, 1)$ de $\mathbb{R}^m$ y por otro lado tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} u &= \varphi \partial_{\underline{x}} (\varphi_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \varphi_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \varphi_m \frac{\partial u}{\partial x_{m-1}} + \varphi_{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_m}) \\ &= \varphi_1 \varphi_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \varphi_2 \varphi_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \varphi_{m-1} \varphi_m \frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1}^2} \\ &\quad + \varphi_m \varphi_{m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} \\ &= -2\varphi_1 \varphi_2 - 2\varphi_2 \varphi_1 - \dots - 2\varphi_{m-1} \varphi_m - 2\varphi_m \varphi_{m-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego $u \in \mathcal{H}_{\varphi, \psi}(B(0, 1), \mathbb{R}_{0,m})$ y no es idénticamente cero.

El ejemplo anterior conduce matemáticamente a una formulación mal planteada del problema de Dirichlet para las funciones (φ, ψ) -armónicas. Se obtiene así la primera gran diferencia entre $\mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ y el espacio de funciones armónicas $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$.

Veamos otra diferencia. Una función con valores en $\mathbb{R}_{0,m}$ satisface la ecuación de Laplace si, y solo si todas sus partes k -vectoriales satisfacen dicha ecuación. En el caso (φ, ψ) -armónico no es del todo similar. Si todas las partes k -vectoriales de una función f son (φ, ψ) -armónicas entonces

$$\varphi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} f = \varphi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} \left(\sum_{k=1}^m [f]_k \right) = \sum_{k=1}^m \varphi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} [f]_k = 0,$$

o sea, la función será también (φ, ψ) -armónica.

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco no es cierto.

Ejemplo 4.2. Sea la función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{0,3}$ dada por $f = [f]_0 + [f]_2$, donde $[f]_0 = x_1 x_2$ y $[f]_2 = \frac{1}{2} x_1^2 \psi_1 \psi_2 + \frac{1}{2} x_2^2 \psi_2 \psi_1$ con $\varphi = (e_1, e_2, e_3)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, siendo

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1),$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{21}}(2, 1, -4),$$

$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, -2, 1).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \psi_1 \psi_2 &= \frac{1}{\sqrt{126}}(-2 + e_1 e_2 - 4e_1 e_3 + 4e_2 e_1 - 2 - 8e_2 e_3 + 2e_3 e_1 \\ &\quad + e_3 e_2 + 4) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{126}}(-3e_1e_2 - 6e_1e_3 - 9e_2e_3)$$

y $\psi_2\psi_1 = -\psi_1\psi_2$ por la propia definición de conjunto estructural.

Entonces $\psi_1\psi_2, \psi_2\psi_1 \in \mathbb{R}_{0,3}^{(2)}$.

Además,

$$\varphi\partial^\psi\partial = \sum_{i=1}^2 \varphi_i\psi_i\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \varphi_1\psi_2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} + \varphi_2\psi_1\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_1}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\varphi\partial^\psi\partial([f]_0) &= e_1\psi_2 + e_2\psi_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{21}}[e_1(2e_1 + e_2 - 4e_3)] + \frac{1}{\sqrt{6}}[e_2(e_1 + 2e_2 + e_3)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{21}}(-2 + e_1e_2 - 4e_1e_3) + \frac{1}{\sqrt{6}}[(-e_1e_2 - 2 + e_2e_3)] \\ &\neq 0,\end{aligned}$$

$$\varphi\partial^\psi\partial([f]_2) = e_1(\psi_1^2)\psi_2 + e_2(\psi_2^2)\psi_1 = -(e_1\psi_2 + e_2\psi_1) \neq 0,$$

sin embargo

$$\varphi\partial^\psi\partial f = \varphi\partial^\psi\partial[f]_0 + \varphi\partial^\psi\partial[f]_2 = 0.$$

4.1 Problema de Riemann-Hilbert

En su famosa disertación de 1851, Bernhard Riemann (1826-1866) formuló su conocido problema de Riemann. Este planteaba, a grandes rasgos, determinar una función holomorfa en un dominio acotado del plano complejo si se tenía una relación entre los valores límites de su parte real y su parte imaginaria. En el caso de una relación lineal, este problema fue considerado por vez primera en 1904 por David Hilbert (1862-1943). Por esta razón en la actualidad, estos problemas se denominan problemas de Riemann-Hilbert. A veces también se utiliza el término, problema de Hilbert. Su estudio está estrechamente relacionado con la teoría de ecuaciones integrales singulares (Muskhelishvili, 1968) y tiene una amplia gama de aplicaciones en casi todas las áreas de la Física y la Ingeniería, como por ejemplo en electromagnetismo, óptica, elasticidad (Muskhelishvili, 1953), dinámica de fluidos, geofísica, teoría cuántica de campos, mecánica cuántica y en la física estadística (Chelkak & Smirnov, 2012). El estudio de problemas de este tipo es primordial en la teoría de polinomios ortogonales (Fokas et al., 1992) y en el análisis asintótico (McLaughlin & Miller, 2006). La falta de conmutatividad inherente al producto de Clifford implica que tal problema está lejos de ser trivial en este contexto multidimensional.

El problema de frontera de Riemann-Hilbert para las funciones (φ, ψ) -armónicas se plantea como sigue:

Encontrar una función $u \in \mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\Omega_+ \cup \Omega_-, \mathbb{R}_{0,m})$ tal que sobre una frontera Γ (que puede ser suave o fractal), con $\mathbf{g} = \{g^{(\mathbf{j})}, |\mathbf{j}| \leq 1\} \in \text{Lip}(1 + \alpha, \Gamma)$ y $\tilde{g}$ su extensión por el Teorema de Whitney, cumpla que

$$\begin{cases} u^+(\underline{x}) - u^-(\underline{x})A = \tilde{g}(\underline{x}) & \text{si } \underline{x} \in \Gamma, \\ [\psi\partial_{\underline{x}}u]^+(\underline{x}) - [\psi\partial_{\underline{x}}u]^-(\underline{x})B = \psi\partial_{\underline{x}}\tilde{g}(\underline{x}) & \text{si } \underline{x} \in \Gamma, \\ u(\infty) = \psi\partial_{\underline{x}}u(\infty) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

donde A, B son dos constantes invertibles de $\mathbb{R}_{0,m}$ y las notaciones $(\cdot)^+$ y $(\cdot)^-$ representan los valores límites de una función al aproximarnos a la frontera Γ por dentro y por fuera del dominio, respectivamente. La resolución de este problema puede encontrarse en Serrano et al. (2022), donde se llegó la conclusión de que en el caso suave, la única solución es de la forma

$$\begin{aligned}u(\underline{x}) &:= \begin{cases} \mathcal{C}_\psi g_*(\underline{x}) + \int_\Gamma K_{\varphi\psi}(\underline{y} - \underline{x})n_\varphi(\underline{y})\psi\partial_{\underline{x}}\tilde{g}(\underline{y})d\underline{y}, & \underline{x} \in \Omega_+, \\ \mathcal{C}_\psi g_*(\underline{x})A^{-1} + \int_\Gamma K_{\varphi\psi}(\underline{y} - \underline{x})n_\varphi(\underline{y})\psi\partial_{\underline{x}}\tilde{g}(\underline{y})d\underline{y}B^{-1}, & \underline{x} \in \Omega_-, \end{cases} \quad (10)\end{aligned}$$

con

$$g_*(\underline{x}) = \int_\Gamma K_{\varphi\psi}(\underline{y} - \underline{x})n_\varphi(\underline{y})\psi\partial_{\underline{x}}\tilde{g}(\underline{y})d\underline{y}(-1 + B^{-1}A) + \tilde{g}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Gamma.$$

También en Serrano et al. (2022), se encuentra una solución para el caso de una frontera fractal.

Existe una diferencia esencial entre el caso fractal y el estudiado anteriormente. De hecho, para una frontera fractal Γ , la función dada por (10) carece de sentido.

Para resolver el problema usaremos la noción de d -sumabilidad, la cual fue introducida en Harrison & Norton (1992). Se va a suponer que Γ es d -sumable para algún $m-1 < d < m$, es decir, la integral impropia

$$\int_0^1 N_\Gamma(\tau)\tau^{d-1}d\tau$$

converge, donde $N_\Gamma(\tau)$ representa el número mínimo de bolas de radio τ necesarias para cubrir Γ .

Un ejemplo de un dominio de Jordan en $\mathbb{R}^2$ con frontera fractal d -sumable es el dominio del copo de nieve de von Koch, cuya frontera es $\frac{\ln 4}{\ln 3} + \varepsilon$ -sumable para cualquier $\varepsilon > 0$ (ver Figura 1).

Esta importante estructura no solo es relevante desde un punto de vista matemático, sino que también tiene importantes aplicaciones en Ingeniería y es ampliamente utilizada en los sistemas de telecomunicaciones modernos (Tumakov et al., 2020; Bellido et al., 2017; Karim et al., 2010). Una extensión tridimensional natural del dominio del copo de nieve de Koch se construye de manera similar a partir de un tetraedro regular en $\mathbb{R}^3$, que produce un dominio de Jordan en $\mathbb{R}^3$ cuya frontera es d -sumable para cualquier

$$d > \frac{\log 6}{\log 2}.$$

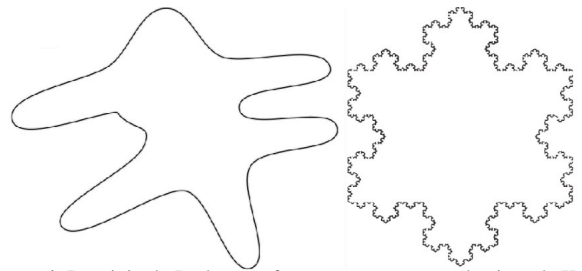


Figura 1. Dominio de Jordan con frontera suave y copo de nieve de Koch

Para comprender mejor la utilidad en la práctica de la d -sumabilidad recomendamos la bibliografía (Falconer, 1990).

Ahora se introducen estos operadores de tipo Teodorescu:

$$\mathcal{T}_\psi v(\underline{x}) = - \int_{\Omega} K_\psi(\underline{y} - \underline{x}) v(\underline{y}) d\underline{y}$$

y

$$\mathcal{T}_{\phi\psi} v(\underline{x}) := \int_{\Omega} K_{\phi\psi}(\underline{y} - \underline{x}) v(\underline{y}) d\underline{y}.$$

El siguiente teorema describe una solución del problema en un contexto fractal, cuya prueba se sustenta esencialmente en el método propuesto por Boris Kats para el caso de funciones analíticas en el plano complejo (Kats, 1983) y en la comprobación directa de la solución.

Teorema 4.1. Sea $g \in Lip(1 + \alpha, \Gamma)$ y sea Γ d -sumable con $\alpha > \frac{d}{m}$. Entonces el problema de Riemann-Hilbert (9) tiene una solución dada por

$$u(\underline{x}) := \begin{cases} g_*(\underline{x}) - \mathcal{T}_\psi[\psi \partial_{\underline{x}} g_*(\underline{x})] + \mathcal{T}_\psi[\psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}(\underline{x})] - \mathcal{T}_{\phi\psi}[\phi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}(\underline{x})], & \underline{x} \in \Omega_+, \\ -\mathcal{T}_\psi[\psi \partial_{\underline{x}} g_*(\underline{x})] A^{-1} + \left(\mathcal{T}_\psi[\psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}(\underline{x})] - \mathcal{T}_{\phi\psi}[\phi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}(\underline{x})] \right) B^{-1}, & \underline{x} \in \Omega_-, \end{cases} \quad (11)$$

donde

$$g_*(\underline{x}) := \left(\mathcal{T}_\psi[\psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}(\underline{x})] - \mathcal{T}_{\phi\psi}[\phi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}(\underline{x})] (u\mathbf{x}) \right) (-1 + B^{-1}A) + \tilde{g}(\underline{x}).$$

Para la demostración del teorema, son necesarios algunos resultados auxiliares que a continuación se mostrarán.

En Serrano et al. (2022) se probaron las siguientes identidades:

$$\psi \partial_{\underline{x}} \mathcal{T}_\psi v(\underline{x}) = \begin{cases} v(\underline{x}), & \text{si } \underline{x} \in \Omega_+, \\ 0 & \text{si } \underline{x} \in \Omega_-, \end{cases} \quad (12)$$

$$\psi \partial_{\underline{x}} \mathcal{T}_{\phi\psi} v(\underline{x}) = \mathcal{T}_\phi v(\underline{x}), \quad \phi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} \mathcal{T}_{\phi\psi} v(\underline{x}) = \begin{cases} v(\underline{x}) & \text{si } \underline{x} \in \Omega_+, \\ 0 & \text{si } \underline{x} \in \Omega_-. \end{cases} \quad (13)$$

Los siguientes dos lemas son imprescindibles para la prueba del Teorema 4.1.

Lema 4.1. Sea $g \in Lip(1 + \alpha, \Gamma)$, entonces

$$\phi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$$

$$\text{para } p = \frac{m-d}{1-\alpha}.$$

Demostración. De la relación c) del Teorema de Whitney se tiene que $|\phi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}(\underline{x})| \leq c[\text{dist}(\underline{x}, \Gamma)]^{\alpha-1}$ para $\underline{x} \in \Omega$. Teniendo este hecho en cuenta, la prueba se sigue de manera análoga a la mostrada en Abreu et al. (2015, Lema 4.1). $\square$

Lema 4.2. Sea $g \in Lip(1 + \alpha, \Gamma)$ con $\alpha > \frac{d}{m}$. Entonces $\mathcal{T}_\psi[\psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}]$ y $\psi \partial_{\underline{x}} \mathcal{T}_{\phi\psi}[\phi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}]$ son funciones continuas en $\mathbb{R}^m$.

Demostración. Como $\psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g} \in C^0(\Omega \cup \Gamma, \mathbb{R}_{0,m})$, entonces $\psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}$ pertenece a $L^p(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$, con $p > m$. Aplicando un análisis similar al de la prueba de Gürlebeck et al. (2008, Proposición 8.1) se concluye que $\mathcal{T}_\psi[\psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}] \in C^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{0,m})$.

Para demostrar la continuidad de $\psi \partial_{\underline{x}} \mathcal{T}_{\phi\psi}[\phi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}]$ se debe apreciar que:

$$\psi \partial_{\underline{x}} \mathcal{T}_{\phi\psi}[\phi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}] = \mathcal{T}_\phi[\phi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}].$$

Bajo la condición $\alpha > \frac{d}{m}$ se puede aplicar el Lema 4.1 para asegurar que $\phi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}$ también pertenece a $L^p(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ con $p > m$, y por lo tanto, el razonamiento descrito anteriormente puede repetirse. $\square$

Demostración de Teorema 4.1. El Lema 4.2 muestra que $g_* \in C^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{0,m})$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \psi \partial_{\underline{x}} g_*(\underline{x}) &= \left(\psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}(\underline{x}) - \mathcal{T}_\phi[\phi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}](\underline{x}) \right) (-1 + B^{-1}A) + \psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}(\underline{x}) \end{aligned}$$

y claramente una vez más se obtiene una función en la clase $C^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{0,m})$.

En consecuencia, $\mathcal{T}_\psi[\psi \partial_{\underline{x}} g_*]$ junto con los términos restantes en (11) pertenecen a $C^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{0,m})$. Por ende, podemos probar la primera condición de frontera en (9). De hecho, se tiene que para $\underline{x} \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} u^+(\underline{x}) - u^-(\underline{x})A &= g_*(\underline{x}) + \mathcal{T}_\psi[\psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}](\underline{x}) - \mathcal{T}_{\phi\psi}[\phi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}](\underline{x}) \\ &\quad - \left[\mathcal{T}_\psi[\psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}](\underline{x}) - \mathcal{T}_{\phi\psi}[\phi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}](\underline{x}) \right] BA^{-1} \\ &= g_*(\underline{x}) + \left[\mathcal{T}_\psi[\psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}](\underline{x}) - \mathcal{T}_{\phi\psi}[\phi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}](\underline{x}) \right] (1 - BA^{-1}) \\ &= \tilde{g}(\underline{x}). \end{aligned}$$

Para la segunda condición se usan nuevamente las identidades (12) y (13), obteniéndose que

$$\psi \partial_{\underline{x}} u(\underline{x}) := \begin{cases} \psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}(\underline{x}) - \mathcal{T}_\phi[\phi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}](\underline{x}), & \underline{x} \in \Omega_+, \\ -\mathcal{T}_\phi[\phi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} \tilde{g}](\underline{x}) B^{-1}, & \underline{x} \in \Omega_-. \end{cases} \quad (14)$$

Por tanto, la segunda condición de frontera se deduce directamente. Finalmente, la (ϕ, ψ) -armonicidad de u en $\mathbb{R}^m \setminus \Gamma$ se sigue inmediatamente de (14) al operar $\phi \partial_{\underline{x}}$ por la izquierda. $\square$

Cabe mencionar que las funciones (ϕ, ψ) -armónicas son soluciones de un sistema diferencial de segundo orden y es por eso que se utiliza la clase de Lipschitz $Lip(1 + \alpha, \Gamma)$. Esta clase juega aquí un papel similar al desempeñado por la clase de Hölder para el problema de Riemann-Hilbert para funciones analíticas.

5. FUNCIONES (ϕ, ψ) -INFRAMONOGÉNICAS

La no conmutatividad del producto cliffordiano provoca que las funciones (ϕ, ψ) -armónicas y las (ϕ, ψ) -inframonogénicas sean bien diferentes en general. La notación que mayormente se usa para denotar a la clase de funciones (ϕ, ψ) -inframonogénicas es: $\mathcal{I}_{\phi, \psi}(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$. Estudios de las funciones (ϕ, ψ) -inframonogénicas pueden encontrarse en los artículos recientes de Alfonso et al. (2022a, 2023).

En el ámbito del cálculo vectorial, cuando nos restringimos a considerar campos vectoriales $f = \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, la ecuación sándwich estándar

$$\partial_{\underline{x}} f \partial_{\underline{x}} = 0$$

puede ser escrita en la forma

$$\text{grad div } \vec{v} + \text{rot}^2 \vec{v} = 0, \quad (15)$$

mientras que para la ecuación de Laplace tenemos la siguiente reescritura

$$\text{grad div } \vec{v} - \text{rot}^2 \vec{v} = 0. \quad (16)$$

Este sutil cambio de signo implica que ambas ecuaciones sean totalmente distintas en muchos aspectos como la elipticidad de Legendre-Hadamard. Es bien conocido que el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace es bien planteado en el sentido de Hadamard (1902); sin embargo, no ocurre lo mismo para la Ecuación (15) porque existe una familia de soluciones no triviales de esta en el semiespacio $x_3 > 0$:

$$\vec{v}(\underline{x}) = x_3 \text{grad } g(\underline{x})$$

satisfaciendo la condición de Dirichlet homogénea

$$\vec{v}|_{x_3=0} = 0,$$

donde $g(\underline{x})$ es un campo escalar armónico arbitrario en el semiespacio $x_3 > 0$ con derivadas de primer orden que decaen lo suficientemente rápido en el infinito.

El operador ${}^{\varphi}\partial_{\underline{x}}(\cdot){}^{\psi}\partial_{\underline{x}}$ es elíptico por ser la composición de dos operadores de Dirac, pero también carece de elipticidad fuerte, aun cuando $\varphi = \psi$. Por ende, en general, el problema de Dirichlet para las funciones (φ, ψ) -inframonogénicas también es mal planteado. Se han podido construir funciones polinómicas (φ, ψ) -inframonogénicas con traza nula sobre dominios elipsoidales, incumpliendo así un posible principio del módulo máximo para este tipo de funciones (Alfonso et al., 2022a). Sin embargo, en Moreno et al. (2023) se estudió el problema de Dirichlet para las funciones (φ, ψ) -inframonogénicas sobre la bola:

$$\begin{cases} {}^{\varphi}\partial_{\underline{x}} f {}^{\psi}\partial_{\underline{x}}|_{B(0,1)} = 0, \\ f|_{\partial B(0,1)} = g, \end{cases} \quad (17)$$

y por medio de los isomorfismos construidos se pudo obtener explícitamente la solución. Si $g \in \text{Lip}(1 + \alpha, \partial B(0,1))$ y m es impar entonces el problema (17) tiene una única solución en $C^2(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$, la cual está dada por la fórmula:

$$f(\underline{x}) = \omega^{-1} S_{\psi}^{-1} \left[\frac{1}{2} (1 - |\underline{x}|^2) \mathcal{R}(\partial_{\underline{x}} \mathcal{P}[S_{\psi} \omega g] \partial_{\underline{x}}) + \mathcal{P}[S_{\psi} \omega g](\underline{x}) \right], \quad (18)$$

donde ω es un número de Clifford invertible tal que $\omega \varphi_i = \psi_i \omega$ para cada $i = 1, 2, \dots, m$, $S_{\psi} : \sum_A a_A \psi_A \mapsto \sum_A a_A e_A$, $\mathcal{R} : a \mapsto \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{k+1}}{m-2k} [a]_k$ y $\mathcal{P}$ denota a la integral de Poisson. La fórmula (18) puede ser aplicada con éxito para resolver (17) en cualquier dimensión, excepto cuando $m = 2k$ y $[g]_k \neq 0$, excepto en este caso específico el operador $\mathcal{R}$ no está definido. Curiosamente, en este caso la solución al problema de Dirichlet deja de ser única e incluso puede no existir. Note también que cuando la traza g es asumida en $C^k(\partial B(0,1))$ con $k \geq 2$ entonces la solución (18)

pertenece a la clase $C^{k-2}(\overline{B(0,1)})$, lo cual revela una marcada diferencia con el clásico problema de Dirichlet para las armónicas, cuya solución mantiene el mismo grado de suavidad de la traza. La pregunta si el problema de Dirichlet (17) tiene solución para toda función $g \in C^k(\partial B(0,1))$ con $k < 2$ permanece abierta, pero se conjetura que la respuesta es negativa.

El operador ${}^{\varphi}\partial_{\underline{x}}(\cdot){}^{\psi}\partial_{\underline{x}}$ tampoco mantiene invariante el espacio de k -vectores y como consecuencia una función (φ, ψ) -inframonogénica puede poseer k -partes que no sean (φ, ψ) -inframonogénicas.

Ejemplo 5.1. Sea la función $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{0,m}$, $m > 2$, definida como:

$$\begin{aligned} h(\underline{x}) &= 2x_1^2 + \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{m-3}^2\} + \\ &+ (3-m)x_{m-2}^2 + x_{m-1}^2 - x_m^2 - 4x_1 x_m e_1 e_m. \end{aligned}$$

Sean los conjuntos estructurales:

$$\varphi = \{e_1, e_2, \dots, e_{m-1}, e_m\},$$

$$\psi = \{e_1, e_2, \dots, e_{m-2}, e_m, e_{m-1}\}.$$

Un cálculo directo muestra lo siguiente:

$$\begin{aligned} {}^{\varphi}\partial_{\underline{x}} h {}^{\psi}\partial_{\underline{x}} &= {}^{\varphi}\partial_{\underline{x}} [2x_1^2 + x_1^2 + \dots + x_{m-3}^2 + (3-m)x_{m-2}^2 + x_{m-1}^2 - x_m^2] {}^{\psi}\partial_{\underline{x}} \\ &- {}^{\varphi}\partial_{\underline{x}} [4x_1 x_m e_1 e_m] {}^{\psi}\partial_{\underline{x}} \\ &= -4 + (-2)(m-3) + (-2)(3-m) + 2e_{m-1} e_m - 2e_m e_{m-1} \\ &- 4e_1^2 e_m e_{m-1} - 4e_m e_1 e_m e_1 \\ &= -4 + 4e_{m-1} e_m + 4e_m e_{m-1} + 4 \\ &= 0, \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} {}^{\varphi}\partial_{\underline{x}} [h]_0 {}^{\psi}\partial_{\underline{x}} &= {}^{\varphi}\partial_{\underline{x}} [2x_1^2 + x_1^2 + \dots + x_{m-3}^2 + (3-m)x_{m-2}^2 + x_{m-1}^2 - x_m^2] {}^{\psi}\partial_{\underline{x}} \\ &= -4 + (-2)(m-3) + (-2)(3-m) + 2e_{m-1} e_m \\ &- 2e_m e_{m-1} = -4 + 4e_{m-1} e_m \neq 0, \\ {}^{\varphi}\partial_{\underline{x}} [h]_2 {}^{\psi}\partial_{\underline{x}} &= {}^{\varphi}\partial_{\underline{x}} [-4x_1 x_m e_1 e_m] {}^{\psi}\partial_{\underline{x}} = 4e_m e_{m-1} + 4 \neq 0. \end{aligned}$$

5.1 Problema del salto

Según la fórmula de Cauchy probada en Alfonso et al. (2022a), si una solución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} ({}^{\varphi}\partial_{\underline{x}} f {}^{\psi}\partial_{\underline{x}})|_{\Omega} = 0, \\ f|_{\Gamma} = g, \end{cases} \quad (19)$$

existe en la clase $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ entonces esta puede representarse por

$$f(\underline{x}) = \int_{\Gamma} f(\underline{y}) n_{\psi}(\underline{y}) K_{\psi}(\underline{y} - \underline{x}) d\underline{y} + \mathcal{C}_{\varphi, \psi}^{infra}(f {}^{\psi}\partial_{\underline{x}})(\underline{x}), \quad (20)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\varphi, \psi}^{infra}(h)(\underline{x}) &= \frac{1}{2} \left[\int_{\Gamma} K_{\varphi}(\underline{y} - \underline{x}) n_{\varphi}(\underline{y}) [h(\underline{y})] (\underline{y}_{\psi} - \underline{x}_{\psi}) d\underline{y} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m \varphi_i \left(\int_{\Gamma} E_1(\underline{y} - \underline{x}) [h(\underline{y})] d\underline{y} \right) \psi_i \right] \end{aligned}$$

es una transformada de tipo Cauchy (φ, ψ) -inframonogénica. Sin embargo, debido a la ausencia del principio del módulo máximo, otras soluciones en la clase $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ pueden existir. El problema de salto para las funciones (φ, ψ) -inframonogénicas establece que:

$$\begin{cases} \varphi \partial_{\underline{x}} u \psi \partial_{\underline{x}} = 0 & \underline{x} \in \Omega_+ \cup \Omega_-, \\ u^+(\underline{x}) - u^-(\underline{x}) = g(\underline{x}) & \text{si } \underline{x} \in \Gamma, \\ [u \psi \partial_{\underline{x}}]^+(\underline{x}) - [u \psi \partial_{\underline{x}}]^-(\underline{x}) = g_1(\underline{x}) & \text{si } \underline{x} \in \Gamma, \\ u(\infty) = (u \psi \partial_{\underline{x}})(\infty) = 0, \end{cases} \quad (21)$$

donde $g, g_1 \in C^{0,\nu}(\Gamma)$. Por las fórmulas de Plemelj-Sokhotski y el teorema de representación integral probado en Alfonso et al. (2022a) se arriba a que la función

$$u(\underline{x}) = \int_{\Gamma} g(\underline{y}) n_{\psi}(\underline{y}) K_{\psi}(\underline{y} - \underline{x}) d\underline{y} + \mathcal{C}_{\varphi, \psi}^{infra}(g_1)(\underline{x}) \quad (22)$$

es una solución de (21). La unicidad de tal solución se garantiza combinando los teoremas de Painlevé y Liouville del Análisis de Clifford (Brackx et al., 1982). Siguiendo un procedimiento semejante al realizado para las funciones (φ, ψ) -armónicas, este problema de salto puede ser extendido para superficies d -sumables con ayuda del teorema de extensión de Whitney, una transformada de tipo Teodorescu definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\varphi, \psi}^{infra}(h) &= -\frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} K_{\varphi}(\underline{y} - \underline{x}) [h(\underline{y})] (\underline{y}_{\psi} - \underline{x}_{\psi}) d\underline{y} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m \varphi_i \left(\int_{\Omega} E_1(\underline{y} - \underline{x}) [h(\underline{y})] d\underline{y} \right) \psi_i \right] \end{aligned}$$

y ahora asumiendo que los saltos pertenezcan a $\text{Lip}(1 + \nu, \Gamma)$ con $\nu > \frac{d}{m}$. Si $g \in \text{Lip}(1 + \nu, \Gamma)$ entonces por un cálculo directo se obtiene que el problema del salto

$$\begin{cases} \varphi \partial_{\underline{x}} u \psi \partial_{\underline{x}} = 0 & \underline{x} \in \Omega_+ \cup \Omega_-, \\ u^+(\underline{x}) - u^-(\underline{x}) = g(\underline{x}) & \text{si } \underline{x} \in \Gamma, \\ [u \psi \partial_{\underline{x}}]^+(\underline{x}) - [u \psi \partial_{\underline{x}}]^-(\underline{x}) = [\tilde{g} \psi \partial_{\underline{x}}](\underline{x}) & \text{si } \underline{x} \in \Gamma, \\ u(\infty) = (u \psi \partial_{\underline{x}})(\infty) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

tiene una solución dada por la fórmula

$$u(\underline{x}) = \tilde{g}(\underline{x}) I_{\Omega}(\underline{x}) - \mathcal{T}_{\varphi, \psi}^{infra}(\varphi \partial_{\underline{x}} \tilde{g} \psi \partial_{\underline{x}})(\underline{x}), \quad (24)$$

donde I_{Ω} denota la función indicadora del dominio Ω . Lamentablemente, esta generalización provoca que el problema también carezca de buen planteamiento en el sentido de Hadamard (Alfonso et al., 2022a). Los métodos tradicionales para el problema de Riemann-Hilbert asociado a las funciones (φ, ψ) -inframonogénicas no son adecuados y factibles para su resolución, lo que hace que sea ampliamente más difícil que el antes estudiado para el operador $\varphi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}}(\cdot)$. La dificultad radica esencialmente en que se tiene que operar a la misma vez por diferentes lados de la función, a diferencia del caso (φ, ψ) -armónico donde todo se ajusta por la izquierda y el método tradicional funciona perfectamente.

6. OBSERVACIONES FINALES

Salvo en el caso de conjuntos estructurales equivalentes, los operadores $\varphi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}}(\cdot)$ y $\varphi \partial_{\underline{x}}(\cdot) \psi \partial_{\underline{x}}$ no cumplen necesariamente con la propiedad de la invariancia sobre $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$ del Laplaciano. No obstante, una versión débil de esta propiedad puede ser obtenida utilizando las partes par e impar de la función. Una función f es (φ, ψ) -armónica ((φ, ψ) -inframonogénica) en Ω si y solo si su parte par

$$f_+ = \sum_{k-\text{par}} [f]_k$$

y su parte impar

$$f_- = \sum_{k-\text{impar}} [f]_k$$

son también funciones (φ, ψ) -armónicas ((φ, ψ) -inframonogénicas). El lector puede verificar este hecho en los ejemplos presentados en las secciones 4 y 5. La prueba de la anterior propiedad es evidente por las relaciones de conmutación siguientes:

$$[\varphi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} f]_{\pm} = \varphi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} [f]_{\pm}, \quad [\varphi \partial_{\underline{x}} f \psi \partial_{\underline{x}}]_{\pm} = \varphi \partial_{\underline{x}} f_{\pm} \psi \partial_{\underline{x}}.$$

En este contexto, si F_k es un campo k -vectorial, la acción del operador de Dirac sobre el campo está dada por

$$\varphi \partial_{\underline{x}} F_k = \varphi \partial_{\underline{x}} \cdot F_k + \varphi \partial_{\underline{x}} \wedge F_k,$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi \partial_{\underline{x}} \cdot F_k &= \frac{1}{2} (\varphi \partial_{\underline{x}} F_k - (-1)^k F_k \varphi \partial_{\underline{x}}) = [\varphi \partial_{\underline{x}} F_k]_{k-1}, \\ \varphi \partial_{\underline{x}} \wedge F_k &= \frac{1}{2} (\varphi \partial_{\underline{x}} F_k + (-1)^k F_k \varphi \partial_{\underline{x}}) = [\varphi \partial_{\underline{x}} F_k]_{k+1}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \varphi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} F_k &= \varphi \partial_{\underline{x}} \cdot \psi \partial_{\underline{x}} \wedge F_k + \varphi \partial_{\underline{x}} \wedge \psi \partial_{\underline{x}} \cdot F_k + \varphi \partial_{\underline{x}} \cdot \psi \partial_{\underline{x}} \cdot F_k \\ &\quad + \varphi \partial_{\underline{x}} \wedge \psi \partial_{\underline{x}} \wedge F_k, \\ \varphi \partial_{\underline{x}} F_k \psi \partial_{\underline{x}} &= (-1)^k \underbrace{(\varphi \partial_{\underline{x}} \cdot \psi \partial_{\underline{x}} \wedge F_k - \varphi \partial_{\underline{x}} \wedge \psi \partial_{\underline{x}} \cdot F_k)}_{k-\text{vector}} \\ &\quad - \underbrace{\varphi \partial_{\underline{x}} \cdot \psi \partial_{\underline{x}} \cdot F_k}_{(k-2)-\text{vector}} + \underbrace{\varphi \partial_{\underline{x}} \wedge \psi \partial_{\underline{x}} \wedge F_k}_{(k+2)-\text{vector}}. \end{aligned}$$

En particular, para campos k -vectoriales (φ, ψ) -armónicos o (φ, ψ) -inframonogénicos se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi \partial_{\underline{x}} \psi \partial_{\underline{x}} F_k = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \partial_{\underline{x}} \cdot \psi \partial_{\underline{x}} \cdot F_k &= 0, \\ \varphi \partial_{\underline{x}} \cdot \psi \partial_{\underline{x}} \wedge F_k + \varphi \partial_{\underline{x}} \wedge \psi \partial_{\underline{x}} \cdot F_k &= 0, \\ \varphi \partial_{\underline{x}} \wedge \psi \partial_{\underline{x}} \wedge F_k &= 0, \end{cases} \\ \varphi \partial_{\underline{x}} F_k \psi \partial_{\underline{x}} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \partial_{\underline{x}} \cdot \psi \partial_{\underline{x}} \cdot F_k &= 0, \\ \varphi \partial_{\underline{x}} \cdot \psi \partial_{\underline{x}} \wedge F_k - \varphi \partial_{\underline{x}} \wedge \psi \partial_{\underline{x}} \cdot F_k &= 0, \\ \varphi \partial_{\underline{x}} \wedge \psi \partial_{\underline{x}} \wedge F_k &= 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Como para cualquier conjunto estructural χ se tiene que

$$\chi \partial_{\underline{x}} \chi \partial_{\underline{x}} = -\Delta,$$

entonces de las relaciones anteriores se obtiene que

$$\Delta F_k = 0 \Leftrightarrow \chi \partial_{\underline{x}} \cdot \chi \partial_{\underline{x}} \wedge F_k + \chi \partial_{\underline{x}} \wedge \chi \partial_{\underline{x}} \cdot F_k = 0,$$

y, además

$$\mathcal{X}\partial_{\underline{x}}F_k\mathcal{X}\partial_{\underline{x}} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{X}\partial_{\underline{x}} \cdot \mathcal{X}\partial_{\underline{x}} \wedge F_k - \mathcal{X}\partial_{\underline{x}} \wedge \mathcal{X}\partial_{\underline{x}} \cdot F_k = 0.$$

Semejante a lo analizado con las ecuaciones (15) y (16), observe también que las anteriores relaciones son idénticas salvo un signo. Estas descomposiciones permiten tratar de una manera factible los llamados $\bar{\partial}$ -problemas. La teoría clásica del $\bar{\partial}$ -problema es muy conocida y aplicada (Krantz, 1982; Aïzenberg & Yuzhakov, 1983). Por su valor teórico y práctico se ha estudiado y discutido en varias ramas de la ciencia (Colombo et al., 2012). En particular, la naturaleza tridimensional de muchos problemas que surgen en la Física Matemática e Ingeniería ha sido una fuerte motivación para considerar diferentes generalizaciones (Porter et al., 1993, 1994; Bory & Pérez, 2019). Sugerimos al lector revisar los trabajos de Alfonso (2024) y Serrano et al. (2021) que abordan los $\bar{\partial}$ -problemas para los operadores $\varphi\partial_{\underline{x}}(\cdot)\psi\partial_{\underline{x}}$ y $\varphi\partial_{\underline{x}}\psi\partial_{\underline{x}}(\cdot)$.

En Alfonso et al. (2023) se estudiaron problemas de frontera bien planteados para la ecuación de Laplace y la ecuación sándwich estándar. Estos problemas generalizan a los estudiados por Dzhuraev (1992). Las condiciones de frontera de estos problemas provocan el buen planteamiento en el sentido de Hadamard. Dichas restricciones estaban conformadas por una condición de tipo Dirichlet junto con otra de tipo Neumann. En la última sección de Alfonso et al. (2023) se analizaron los problemas más generales donde intervenían los operadores $\varphi\partial_{\underline{x}}\psi\partial_{\underline{x}}(\cdot)$ y $\varphi\partial_{\underline{x}}(\cdot)\psi\partial_{\underline{x}}$ sobre campos k -vectoriales. Los problemas se enfocaban en determinar un campo k -vectorial $F_k(\underline{x}) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ que solucionara cualesquiera de las ecuaciones:

$$\varphi\partial_{\underline{x}} \cdot \psi\partial_{\underline{x}} \wedge F_k \pm \varphi\partial_{\underline{x}} \wedge \psi\partial_{\underline{x}} \cdot F_k = f_k, \quad f_k \in C(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}^{(k)}),$$

sujeto al par de condiciones de frontera siguientes:

$$\begin{aligned} (n_{\psi} \wedge F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\ (\psi\partial_{\underline{x}} \cdot F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} (n_{\psi} \cdot F_k)|_{\partial\Omega} &= 0, \\ (\psi\partial_{\underline{x}} \wedge F_k)|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Sin embargo, debido a que en general el problema de frontera siguiente

$$\begin{cases} (\varphi\partial_{\underline{x}} \wedge F_k)|_{\Omega} = 0, \\ (\psi\partial_{\underline{x}} \cdot F_k)|_{\Omega} = 0, \\ F_k|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

puede tener soluciones no triviales en Ω para cuando los conjuntos estructurales sean no equivalentes, entonces siguiendo la metodología aplicada por Alfonso et al. (2023), se implica el mal planteamiento de los problemas asociados a los operadores estudiados: $\varphi\partial_{\underline{x}}\psi\partial_{\underline{x}}(\cdot)$ y $\varphi\partial_{\underline{x}}(\cdot)\psi\partial_{\underline{x}}$. Es llamativo cómo el uso de bases ortonormales arbitrarias causa diferencias inherentes con respecto al enfoque estándar. Este hecho abre el camino para futuras investigaciones dentro de la teoría de funciones ψ -hiperholomorfas.

7. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Las álgebras de Clifford proveen un lenguaje unificador que permite extender nociones y resultados importantes del análisis complejo a espacios multidimensionales. La factorización del Laplaciano por medio del operador de Dirac, construido sobre una base

ortonormal del espacio euclídeo $\mathbb{R}^m$, es un hecho de vital importancia que constituye un puente entre el Análisis de Clifford y el más tradicional Análisis Armónico. La consideración de conjuntos estructurales, en lugar de la base estándar de $\mathbb{R}^m$, abre nuevas líneas de investigación en temas de importancia propia como las descomposiciones de Fischer, teoría de las supersimetrías, conjuntos de unicidad e invariancia de operadores. Las clases de funciones (φ, ψ) -armónicas y (φ, ψ) -inframonogénicas representan auténticas generalizaciones de las funciones armónicas y constituyen subclases no triviales de las funciones biarmónicas. Se ha logrado resolver en forma analítica el problema de contorno de tipo Riemann-Hilbert para estas clases de funciones biarmónicas. En futuras investigaciones, se pretende obtener condiciones suficientes que garanticen la unicidad de las soluciones de dichos problemas, estudiados bajo hipótesis geométricas muy generales para las fronteras de los dominios, incluyendo el caso general de fronteras fractales.

8. CONCLUSIONES

El alto grado de flexibilidad que supone la consideración de conjuntos estructurales arbitrarios en las ecuaciones (3) y (4) permite agrupar, de una manera refinada, una amplia gama de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que tienen una estrecha relación con la ecuación de Laplace. Aunque estructuralmente diferentes a las armónicas, las funciones (φ, ψ) -armónicas y (φ, ψ) -inframonogénicas comparten pequeños rasgos de semejanza en algunos aspectos específicos como la biarmonicidad y la regularidad en el dominio. El estudio de nuevos problemas de frontera ayudará a comprender aún más a estos tipos de funciones y así descubrir otras semejanzas y diferencias con el caso armónico.

AGRADECIMIENTOS

José Luis Serrano Ricardo y Daniel Alfonso Santiesteban agradecen la Beca Nacional para Estudios de Posgrado de la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) (CVU: 1042069, 1043969).

REFERENCIAS

- Abreu Blaya, R., Ávila Ávila, R., & Bory Reyes, J. (2015). Boundary value problems with higher order Lipschitz boundary data for polymonogenic functions in fractal domains, *Applied Mathematics and Computation*, 269(1), 802-808. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.08.012>
- Aïzenberg, I. A., & Yuzhakov, A. P. (1983). *Integral representations and residues in multidimensional complex analysis*, Translations of Mathematical Monographs, 58, American Mathematical Society, Providence, RI.
- Alfonso Santiesteban, D., Abreu Blaya, R., & Árciga Alejandre, M.P. (2022). On (φ, ψ) -inframonogenic functions in Clifford analysis. *Bull. Braz. Math. Soc. New Ser.*, 53(2), 605-621. <https://doi.org/10.1007/s00574-021-00273-6>

- Alfonso Santiesteban, D., Abreu Blaya, R., & Árciga Alejandre, M.P. (2022). On a generalized Lamé-Navier system in $\mathbb{R}^3$. *Mathematica Slovaca*, 72(6), 1527-1540. <https://doi.org/10.1515/ms-2022-0104>
- Alfonso Santiesteban, D., Abreu Blaya, R., & Bory Reyes, J. (2023). Boundary value problems for a second-order elliptic partial differential equation system in Euclidean space. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46(14), 15784-15798. <https://doi.org/10.1002/mma.9426>
- Alfonso Santiesteban, D. (2024). $\bar{\partial}$ -problem for a second-order elliptic system in Clifford analysis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 47(12), 9718-9728. <https://doi.org/10.1002/mma.10090>
- Bellido, E. P. G., Bernasconi, D., Rossouw, D., Butet, J., Martin, O. J. F., & Botton, G. A. (2017). Self-similarity of plasmon edge modes on Koch fractal antennas. *ACS Nano*, 11, 11240-11249. <https://doi.org/10.1021/acsnano.7b05554>
- Bory Reyes, J., De Schepper, H., Guzman Adán, A., & Sommen, F. (2016). Higher order Borel-Pompeiu representations in Clifford analysis. *Math. Methods Appl. Sci.*, 39(16), 4787-4796. <https://doi.org/10.1002/mma.3798>
- Bory Reyes, J., & Pérez de la Rosa, M. A. (2019). Solutions of inhomogeneous generalized Moisil-Teodorescu systems in Euclidean space. *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, 29(2), Paper No. 27. <https://doi.org/10.1007/s00006-021-01134-7>
- Brackx F., Delanghe, R. & Sommen, F. (1982). *Clifford analysis*. Research Notes in Mathematics, 76, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston.
- Chelkak, D., & Smirnov, S. (2012). Universality in the 2D Ising model and conformal invariance of Fermionic observables. *Inventiones mathematicae*, 189(3), 515-580. <https://doi.org/10.1007/S00222-011-0371-2>
- Clifford, W. (1878). Applications of Grassmann Extensive Algebra. *Americ. J. of Math. Pure and Appl.*, 1(4), 350-358. <https://doi.org/10.2307/2369379>
- Cnops, J. (1995). *An introduction to Clifford analysis*. Textos de Matemática, Serie B., Universidade de Coimbra. Portugal, 7.
- Colombo, F., Luna Elizarrarás, M.E., Sabadini, I., Shapiro, M., & Struppa, D.C. (2012). A quaternionic treatment of the inhomogeneous div-rot system. *Moscow Math. J.*, 12(1), 37-48.
- Delanghe, R. (1970). On regular-analytic functions with values in a Clifford algebra. *Math. Ann.*, 185, 91-111. <https://doi.org/10.1007/BF01359699>
- Delanghe, R. (2001). Clifford Analysis: History and Perspective. *Computational Methods and Function Theory*, 1(1), 107-153. <https://doi.org/10.1007/BF03320981>
- Delanghe, R. & Bory Reyes, J. (2003). An invitation to Clifford Analysis. *Cienc. Mat.*, 21(2), 109-137.
- Dzhuraev, A. (1992). *Methods of singular integral equation*. Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics 60, Longman Scientific & Technical, Harlow; co-published in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York. <https://doi.org/10.1137/1036091>
- Falconer, K. *Fractal geometry*. Mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester. <https://doi.org/10.1002/0470013850>.
- Fokas, A.S., Its, A.R., & Kitaev, A.V. (1992). The isomonodromy approach to matrix models in 2D quantum gravity. *Communications in Mathematical Physics*, 147(2), 395-430. <https://doi.org/10.1007/BF02096594>
- Gilbert, J. E., & Murray, M. A. (1991). *Clifford Algebras and Dirac Operators in Harmonic Analysis*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 26, Cambridge University Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511611582>
- Gürlebeck, K., Habetha, K., & Sprössig, W. (2016). *Application of holomorphic functions in two and higher dimensions*. Birkhäuser/Springer, [Cham]. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0964-1>
- Gürlebeck, K., Habetha, K., & Sprössig, W. (2008). *Holomorphic functions in the plane and n-dimensional space*. Translated from the 2006 German original. Birkhäuser Verlag, Basel. <https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8272-8>
- Gürlebeck, K., & Nguyen, H.M. (2014). On ψ -hyperholomorphic functions and a decomposition of harmonics. *Hypercomplex analysis: new perspectives and applications*. *Trends Math.*, 181-189. <https://doi.org/10.1063/1.4825536>
- Hadamard, J. (1902). Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Bull. Univ. Princeton*, 13, 49-52.
- Hamilton, W. (1866). *Elements of quaternions*. Longmans Green.
- Harrison, J., & Norton, A. (1992). The Gauss-Green theorem for fractal boundaries. *Duke Math. J.*, 67(3), 575-588. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-92-06724-X>
- Karim, M., Rahim, M., Majid, H., Ayop, O., Abu M., & Zubir, F. (2010). Log Prediodic Fractal Koch Antenna for UHF band applications. *Progress In Electromagnetics Research, PIER*, 100, 201-218. <https://doi.org/10.2528/PIER09110512>
- Kats, B. (1983). The Riemann problem on a closed Jordan curve. *Sov. Math. (Iz VUZ)*, 27, 83-98.
- Krantz, S. G. (1982). *Function theory of several complex variables*, Pure and Applied Mathematics. John Wiley and Sons, Inc., New York, ISBN 13: 9780471093244.

- Liu, L. W. & Hong, H. K. (2018). Clifford algebra valued boundary integral equations for three-dimensional elasticity. *Appl. Math. Modell.*, 54, 246-267. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.09.031>
- Malonek, H., Peña Pérez, D., & Sommen, F. (2010). Fischer decomposition by inframonogenic functions. *CUBO*, 12(2), 189-197. <https://doi.org/10.4067/S0719-06462010000200012>
- Malonek, H., Peña Pérez, D., & Sommen, F. (2011). A Cauchy-Kowalevski theorem for inframonogenic functions. *Math. J. Okayama Univ.*, 53, 167-172.
- McLaughlin, K., & Miller, P. (2006). The d-bar steepest descent method and the asymptotic behavior of polynomials orthogonal on the unit circle with fixed and exponentially varying nonanalytic weights. *IMRP*, 2006(48673), 1-77. <https://doi.org/10.1155/IMRP/2006/48673>
- Moreno García, A., Alfonso Santiesteban, D., & Abreu Blaya, R. (2023). On the Dirichlet problem for second order elliptic systems in the ball. *Journal of Differential Equations*, 364, 498-520. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2023.03.050>
- Moreno García, A., & Delgado, B.B. Transmission boundary value problems for the Lamé-Navier system. *Bol. Soc. Mat. Mex.*, 30(6). <https://doi.org/10.1007/s40590-023-00577-1>
- Muskhelishvili, N.I. (1968). *Singular Integral Equations*. Nauka, Moscow. English transl. of 1st ed., Noodhoff, Groningen, 1953.
- Muskhelishvili, N.I. (1953). *Singular integral equations. Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics*. Dover Publications Inc., New York, Translated from the second, 1946, Russian edition and with a preface by J. R. M. Radok, Corrected reprint of the 1953 English translation.
- Nôno, K., & Inenaga, Y. (1987). On the Clifford linearization of Laplacian. *J. Indian Inst. Sci.*, 67(5-6), 203-208.
- Porter, M., Shapiro, M., & Vasilevski, N. L. (1993). On the analogue of the ∂ -problem in quaternionic analysis. Clifford algebras and their applications in mathematical, *Fund. Theories Phys.*, 55, 167-173. https://doi.org/10.1007/978-94-011-2006-7_20
- Porter, M., Shapiro, M., & Vasilevski, N. L. (1994). Quaternionic differential and integral operators and the ∂ -problem. *J. Natur. Geom.*, 6(2) 101-124.
- Reséndis, F. & Shapiro, M. (2002). Recent advances in hypercomplex analysis. *Carta Informativa, Soc. Mat. Mex. Marzo*, 11-14.
- Ryan, J. (2000). Basic Clifford analysis. *Cubo Matematica Educacional* 2, 226-256.
- Ryan, J. (2004). Clifford analysis. In Ablamowicz, Rafal and Sobczyk, Garret (Eds.) *Lectures on Clifford (geometric) algebras and applications*. Boston, MA: Birkhauser 53-89. Online ISBN: 978-0-8176-8190-6. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8190-6_3
- Serrano Ricardo, J.L., Abreu Blaya, R., Bory Reyes, J., & Sánchez Ortiz, J. (2022). On a Riemann-Hilbert boundary value problem for (φ, ψ) -harmonic functions in $\mathbb{R}^m$. *Georgian Mathematical Journal*, 29(3) 445-454. <https://doi.org/10.1515/gmj-2022-2146>
- Serrano Ricardo, J.L., Bory Reyes, J., & Abreu Blaya, R. (2021). Singular integral operators and a ∂ -problem for (φ, ψ) -harmonic functions. *Anal. Math. Phys.*, 11(155). <https://doi.org/10.1007/s13324-021-00590-5>
- Shapiro, M.V. (1997). *On the conjugate harmonic functions of M. Riesz-E. Stein-G. Weiss*. In: Stancho Dimiev, et al. (Eds.), Topics in Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics, Third International Workshop on Complex Structures and Vector Fields, St. Konstantin, Bulgaria, August 23-29, World Scientific, Singapore, 8-32.
- Shapiro, M.V., & Vasilevski, N.L. (1995). Quaternionic ψ -hyperholomorphic functions, singular integral operators and boundary value problems. i. ψ -hyperholomorphic function theory. *Complex Variables*, 27, 17-46. <https://doi.org/10.1080/17476939508814803>
- Stein, E. (1970). *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series, 30 Princeton University Press, Princeton, N.J. <https://doi.org/10.1515/9781400883882>
- Tumakov, D., Chikrin, D., & Kokunin, P. (2020). Miniaturization of a Koch-Type Fractal Antenna for Wi-Fi Applications. *Fractal Fract.* 2020, 4(25). <https://doi.org/10.3390/fractalfract4020025>
- Whitney, H. (1934). Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36(1), 63-89.

BIOGRAFÍA



José Luis, Serrano Ricardo. Es un matemático, investigador y profesor cubano radicado en México. Obtuvo su título de Licenciado en Matemáticas y Premio al Mérito Científico en la Universidad de Holguín. Allí también ejerció como docente. Tiene ade-

más una Maestría en Ciencias Matemáticas y una Maestría en Matemáticas Aplicadas obtenidas en Cuba y México respectivamente. Actualmente realiza su doctorado en matemáticas en la Universidad Autónoma de Guerrero. Cuenta con varias publicaciones en su área de investigación que es el análisis de Clifford. Ha sido

ponente en varios congresos nacionales e internacionales de Matemáticas.



Daniel, Alfonso Santiesteban.

5 de enero de 1995, Banes, Cuba. Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Holguín en 2018. Máster en Ciencias Matemáticas por la Universidad de La Habana en 2020. Máster en Matemáticas Aplicadas por la Universidad Autónoma de Guerrero y actualmente es doctorando por la misma alma mater. Ha

obtenido importantes resultados en el estudio de problemas de frontera para ecuaciones en derivadas parciales, mediante el uso de las modernas técnicas no conmutativas del análisis de Clifford. Deben mencionarse sus contribuciones en la investigación de la ecuación de Lamé-Navier, así como su implementación computacional.



Ricardo, Abreu Blaya. 27 de julio de 1969, Holguín, Cuba. Profesor Titular de la Facultad de Matemática de la Universidad Autónoma de Guerrero. Doctor en Ciencias Matemáticas (Dr.) y Doctor en Ciencias (Dr.Cs). Miembro del Sistema Nacional de Investigadoras e Investigadores del CONAHCYT desde 2019 (Nivel II). Miembro de la Sociedad Cubana de Mate-

mática y Computación. Miembro de La Sociedad Internacional de Análisis, Aplicaciones y Computación (ISAAC). Académico Titular de la Academia de Ciencias de Cuba desde 2012-2024. Ha publicado más de 170 artículos en revistas de prestigio internacional.