

**Una Medición de la Desigualdad de Ingresos según el Ingreso Relativo:
Fundamentos, Simulación y Cálculo para el Perú, 2004 – 2017**
**A Measurement of Income Inequality According to Relative Income:
Foundations, Simulation and Calculation for Peru, 2004 - 2017**

Eloy Eduardo Avalos Alvarado¹ <https://orcid.org/0000-0002-9521-9552>

¹Departamento Académico de Economía, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Perú,
eavalosa@unmsm.edu.pe

Resumen

En el presente artículo se propone un índice de desigualdad de ingresos basado en el concepto de ingreso relativo de los receptores y se realizan simulaciones bajo las distribuciones de Pareto, log normal y log logística para su cálculo. La propuesta es novedosa en la literatura económica dado que, el índice está referenciado en medidas estadísticas descriptivas y a la vez está fundamentado en un marco de la teoría del bienestar social. La fundamentación analítica del índice permite interpretar el ratio media geométrica - media aritmética como una expresión de la relación bienestar efectivo – bienestar máximo. El índice propuesto incumple algunas de las propiedades deseables, sin embargo, es una medida de la desigualdad basada en estadísticos descriptivos que posee un marco normativo: la función de bienestar de Nash. Además, complementa la formulación de un índice de Atkinson de aversión a la desigualdad igual a uno. El índice presenta un buen performance en las simulaciones, presentando una alta correlación con el índice de Gini.

Palabras Clave: Bienestar social, criterio de Nash, desigualdad distributiva, índice de desigualdad, ingreso relativo.

Abstract

In this article, an income inequality index is proposed based on the concept of relative income of the recipients, and simulations are carried out under the Pareto, log normal and log logistic distributions for its calculation. The proposal is novel in the economic literature since the index

is referenced in descriptive statistical measures and at the same time is based on a framework of social welfare theory. The analytical basis of the index allows interpreting the geometric mean ratio - arithmetic mean as an expression of the effective well-being - maximum well-being relationship. The proposed index does not meet some of the desirable properties; however, it is a measure of inequality based on descriptive statistics that has a normative framework: the Nash welfare function. In addition, it complements the formulation of an Atkinson index of inequality aversion equal to one. The index presents a good performance in the simulations, presenting a high correlation with the Gini index.

Keywords: Social welfare, Nash criterion, distributive inequality, inequality index, relative income.

Código JEL: D30, D63.

Fecha de recepción: 26/03/2022

Fecha de aceptación: 09/11/2022

INTRODUCCIÓN

Existen diversas clases de índices que miden la desigualdad económica de los ingresos. Una clasificación general tipifica algunas de estas mediciones como medidas positivas y otras como medidas normativas. Las primeras basadas únicamente en medidas estadísticas mientras que las segundas están fundamentadas en el marco informacional de alguna función de bienestar social (Villar, 2017). También, los índices se pueden clasificar según el enfoque de la dimensión o del indicador, manteniendo constante estos o no (Subramanian, 2004). Entre todas las medidas, la de mayor uso en el campo de la economía, específicamente en los campos de la economía del bienestar y de la teoría del desarrollo económico, es el coeficiente de Gini. Sin embargo, este índice supone una curva Lorenz, siendo entonces posible que para dos curvas de Lorenz diferentes podemos obtener el mismo coeficiente de Gini (Medina, 2001).

El problema de la dominancia estocástica de una curva de Lorenz sobre otra, y su relación con el índice de Gini, motivó el inicio del presente trabajo, en el cual proponemos un índice fundamentado en la teoría del bienestar social, específicamente en la función de bienestar de

Nash generalizada (Nash, 1950).¹ Si bien el fundamento es normativo, el índice propuesto se desarrolla sobre la base de medidas estadísticas (enfoque positivo) superando así esta dicotomía de la clasificación de las medidas de desigualdad. Realizaremos algunos cálculos del índice basado en situaciones distributivas simuladas, la primera con una distribución de Pareto, la segunda según una distribución log normal y por último con una distribución log logística. Asimismo, a lo largo de las simulaciones compararemos la performance de los resultados del índice propuesto con los resultados del índice de Gini.² Finalmente, realizaremos una estimación del índice para los departamentos del Perú, para el periodo 2004 – 2017.

REVISIÓN DE LA LITERATURA

En la literatura sobre índices de la desigualdad distributiva de ingresos o riquezas se encuentra la relación media geométrica – media aritmética únicamente como un caso particular de la medida de la desigualdad llamado índice de Atkinson, cuando el parámetro ϵ , que representa la aversión a la desigualdad, es igual a uno, esto es $\epsilon = 1$ (Allison, 1978). Desde otro punto de vista, el estadístico – matemático, la expresión de una medida de la desigualdad distributiva de ingresos, en términos de la varianza logarítmica o de la varianza de los logaritmos, estas difieren en el caso de la primera, en la utilización de la media aritmética, y en la segunda en el uso de la media geométrica de los ingresos (Atuesta et al., 2018). El uso de la primera medida es más común, sin embargo, la segunda medida sería una medida más adecuada cuando se quiera estudiar el efecto de las transferencias de ingreso sobre los cuartiles inferiores. Adicionalmente, el uso de los logaritmos tiende a disminuir la desviación destacando las diferencias en el extremo inferior de la distribución de ingresos, dificultando su uso como una medida del bienestar social, pues su expresión $H = \left[\sum_{i=1}^n (\log \mu - \log y_i)^2 / n \right]^{1/2}$ ya no será cóncava para los niveles de ingreso mayores (Sen & Foster, 1997).

Entonces, tanto la medida media aritmética – media geométrica que se deriva como un caso especial del índice de Atkinson como la propuesta estadística-matemática que recoge los efectos de las transferencias, carecen del sustento de un marco teórico normativo basado en una teoría del bienestar social. No poseen una teoría del bienestar que fundamente el uso de ambas medidas estadísticas para medir la desigualdad y que dé cuenta de la relación entre desigualdad y bienestar social. Por otro lado, en el marco de una teoría de la justicia distributiva, se encuentra

¹ El índice de Gini carece de un marco normativo o de una teoría del bienestar social, pues es considerado un índice de tipo positivo.

² La comparación se realiza con el índice de Gini por ser este índice el de mayor uso en el campo de la economía.

una evaluación, por un lado, del sentimiento de justicia de los recursos individuales en relación con la población relevante; tratándose este aspecto como el logaritmo de la razón de la media geométrica de la distribución del bien a la media aritmética de la distribución del bien de valor; mostrándose una relación entre este ratio como medida de la desigualdad y el sentido de justicia distributiva (Jasso, 1980). Este planteamiento, si bien posee una teoría de la justicia subyacente, no existe una teoría de bienestar social explícita.

Finalmente, Jasso (1982), en una propuesta más acabada y posterior, propone la construcción de una medida de la desigualdad basada en los dos estadísticos mencionados, sosteniendo que la proporción de cantidad que se siente injustamente mal recompensada es igual a la proporción de una cantidad de ingresos por debajo de la media, donde la justicia media viene dada por $justicia\ media = 1 - \delta$, siendo $\delta = \frac{e^{\int yg(y)dy}}{\int xf(x)dx}$ para $y = \log x$. Esto es, el ratio media aritmética – media geométrica. Así, se presenta la relación $justicia\ media = \log\ desigualdad\ de\ ingresos$, donde la desigualdad distributiva de ingresos es medida por el ratio ingreso medio aritmética – ingreso medio geométrico. Esta formulación coincide con nuestra formulación, sin embargo; nuevamente, no se formula una relación explícita entre la desigualdad distributiva y el bienestar social.

MARCO ANALÍTICO

Se supondrá una sociedad compuesta por un conjunto, \mathcal{J} , de receptores de ingresos, donde $|\mathcal{J}| = I \in \mathbb{N}_{++}$.³ El ingreso de cada receptor $i \in \mathcal{J}$ viene dado por $y_i \in \mathbb{R}_{++}$.⁴ Una distribución de ingreso dada se denota por el vector $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_I)$, donde el subíndice no sólo representa al receptor sino además representa una indización de tal forma que $y_1 \leq \dots \leq y_I$. El espacio de distribución de ingresos se denota por el conjunto $Y \subseteq \mathbb{R}_{++}^I$. Luego, cada individuo miembro de la sociedad $i \in \mathcal{J}$ posee preferencias regulares representadas por una función de utilidad $u_i: \mathbb{R}_{++} \mapsto \mathbb{R}$, donde $u_i' > 0$ y $u_i'' < 0$ (Arrow, 1971). Entonces, para una distribución dada, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_{++}$, el ingreso medio aritmético viene dado por la función $\mu = I^{-1} \sum_{i=1}^I y_i$ y la proporción de ingreso del receptor i en relación a la renta total viene dada por el parámetro $\theta_i = (\mu I)^{-1} y_i$.

³ Trabajamos con receptores que no necesariamente son individuos. Esto nos permitirá, frente a una distribución cualquiera, tener diferentes resultados según cómo se definan los perceptores.

⁴ Las medidas de desigualdad normativas que suponen una función de bienestar social y la idea del máximo bienestar social, dada la convexidad estricta de las curvas de iso-bienestar, suponen una solución interna. En consecuencia, los ingresos de una distribución cualesquiera deberán ser estrictamente positivos (Villar 2017).

La función de bienestar de Nash

El criterio de Nash generalizado (Maskin, 1976; Weymark, 2016), permite formular un funcional de bienestar social bajo un marco informacional de representación cardinal y de comparabilidad de variaciones de utilidad. Formalmente,

$$F(u_1, \dots, u_I) = \prod_{i=1}^I [u_i(\cdot) - u_i(\tilde{y})]^{\delta_i} \quad [1]$$

donde $\sum_{i=1}^I \delta_i = 1$ y \tilde{y} es el ingreso correspondiente a un estado social de *statu quo*.

Para efectos de la construcción de la medida de la desigualdad que se propone supondremos que $u_i(\tilde{y}) = 0$ para todo $i \in \mathcal{J}$. Además, específicamente, la función de utilidad individual es bien comportada y de forma $u_i(y_i) = y_i^{\alpha_i}$, donde $0 < \alpha_i < 1$.⁵ Además, asumiremos que para todo receptor $i \in \mathcal{J}$ ocurre $\alpha_i = K_1$ y $\delta_i = K_2$, siendo K_1 y K_2 constantes.⁶ Luego, por simplicidad suponemos que $K_1 K_2 = I^{-I}$. Así, la funcional específica a desarrollar será:

$$F(u_1, \dots, u_I) = \left(\prod_{i=1}^I y_i \right)^{\frac{1}{I}} = v \quad [2]$$

donde v es el ingreso medio geométrico.

En consecuencia, para una distribución de ingresos dada \mathcal{Y}^0 el bienestar efectivo, según la ecuación [2] vendría dado por la media geométrica v^0 . Tenemos así, una medida estadística descriptiva que no sólo sería una aproximación del bienestar efectivo sino que además es una medida monetaria del bienestar.

En cuanto al bienestar social máximo, se considerará que para la sociedad de I receptores con un ingreso total igual a Y^0 , la distribución de ingreso que maximiza el bienestar social es \mathcal{Y}^* , donde esta distribución es el resultado de resolver el problema siguiente,

⁵ Esto implica que el ingreso de *statu quo* es cero. Por tanto, suma o agrega al bienestar social únicamente todo ingreso por receptor mayor a cero. Esto a su vez es consistente con el marco informacional sobre el cual estamos proponiendo el índice.

⁶ Supuestos de este tipo en la literatura de medidas normativas de la desigualdad no son extraños, por ejemplo en el desarrollo de los índices de desigualdad de Dalton y Atkinson se asume una misma función de utilidad para cada uno de los receptores (Guerrero, 1987).

$$\begin{aligned} & \max_{y_1, \dots, y_I} \left(\prod_{i=1}^I y_i \right)^{\frac{1}{I}} \\ & \text{s. a } \sum_i y_i - Y^0 = 0 \end{aligned} \quad [3]$$

de este programa se obtiene una asignación de ingresos igualitaria. Esto es, un resultado socialmente óptimo donde $y_1^* = \dots = y_I^*$.⁷ Por tanto, la distribución de ingresos que maximiza el bienestar social será $\mathbf{y}^* = (\mu, \dots, \mu)$. Así, el máximo bienestar social estará asociado con la medida estadística de la media aritmética:

$$F_{max} = \mu \quad [4]$$

Y nuevamente, se tendrá otra medida estadística como una medida monetaria del bienestar social óptimo.

El ingreso relativo

Nuevamente, sea la sociedad conformada por un número de I receptores de ingresos. Para cada distribución de ingresos (y_1, \dots, y_I) que agota el ingreso total $Y^0 = \sum_{i=1}^I y_i$, se tiene que cada receptor posee como ambiente un vector de ingresos relativos. Para el i -ésimo receptor este es, $r_i = (r_{i1}, \dots, r_{iI}) \in \mathbb{R}_{++}^{I-1}$, donde $r_{ij} = y_i y_j^{-1}$, $i \neq j$.

Con la intención de resaltar el mayor grado de desigualdad del i -ésimo receptor en relación a los receptores que tienen mayores ingresos, en el cálculo del ingreso relativo promedio, al ingreso relativo r_{i1} se le asignará un menor peso que al ingreso relativo r_{iI} , ya que $y_1 < y_i < y_I$. La ponderación tomará en cuenta la importancia del ingreso del j -ésimo receptor opositor en relación al ingreso total Y^0 a distribuir entre todos los receptores. Por tanto, $\theta_j, j \neq i$, donde $\theta_1 \leq \dots \leq \theta_I$.

En seguida, para cada receptor $i \in J$, el ingreso relativo que tomaremos como referencia será su ingreso relativo promedio que es igual al promedio aritmético ponderado $\bar{r}_i = \sum_{j=1}^{I-1} \theta_j r_{ij}$, donde $i \neq j$ y $\sum_j \theta_j = 1 - \theta_i$. Luego, simplificando algebraicamente obtendremos el siguiente resultado como una expresión del ingreso relativo promedio por receptor:⁸

⁷ El mismo resultado se obtiene para los índices de Dalton y Atkinson trabajándose con una función de bienestar social benthamita.

⁸ Ya que $\bar{r}_i = \sum_{j=1}^{I-1} \theta_j r_{ij} = (I-1) \frac{y_i}{Y^0}$. Y dado que de la media aritmética se obtiene $Y^0 = I\mu$; entonces reemplazando se obtiene la ecuación [5].

$$\bar{r}_i = \left(\frac{I-1}{I} \right) \frac{y_i}{\mu} \quad [5]$$

A nivel agregado, para toda la sociedad, en la cual existen I receptores de ingresos, tendremos el mismo número de ingresos relativos promedio, uno para cada receptor. En este punto, optaremos por la media geométrica de estos ingresos para calcular el ingreso relativo promedio de la sociedad. Esto es, $\hat{r} = \left(\prod_{i=1}^I \bar{r}_i \right)^{\frac{1}{I}}$. Luego, considerando la ecuación [5], la ecuación del ingreso promedio del receptor, quedará como:

$$\hat{r} = \left(\frac{I-1}{I} \right)^{\frac{1}{I}} \frac{v}{\mu} \quad [6]$$

Ahora, en la medida que el número de receptores I sea lo suficientemente grande, podríamos utilizar \hat{R} como una buena aproximación de \hat{r} , donde

$$\lim_{I \rightarrow \infty} \hat{r} = \hat{R} \equiv \frac{v}{\mu} \quad [7]$$

El índice de desigualdad de ingreso relativo

1. Como expresión normativa

Para la construcción del nuestro índice de desigualdad de ingreso relativo consideraremos como dada una distribución de ingresos cualesquiera $\mathcal{Y}^0 \in \mathbb{Y}$ tal que $\sum_i y_i^0 = Y^0$. Por otro lado, como ocurre con los índices de desigualdad de Dalton (1920) y Atkinson (1970), la diferencia entre el bienestar de máximo bienestar social y el bienestar efectivo se continúa considerando como una medida de la desigualdad de ingresos. Así, el índice de desigualdad de ingresos que proponemos y al que denotaremos como *IDIR* (índice de desigualdad de ingreso relativo) conceptualmente, vendría dado por,

$$IDIR = 1 - \frac{\mathcal{F}^0}{\mathcal{F}_{max}} \quad [8]$$

Entonces, bajo el marco normativo propuesto según el criterio de bienestar de Nash, las ecuaciones [2] y [4] nos permitirán especificar el *IDIR* como una relación entre el ingreso medio geométrico y el ingreso medio aritmético. Esto es,

$$IDIR = 1 - \frac{v}{\mu} \quad [9]$$

Este resultado, coincide con la especificación del índice de Atkinson para cuando el coeficiente de aversión a la desigualdad es igual a 1 (Medina, 2001).

2. Como expresión positiva

En esta perspectiva, considerando la aproximación del ingreso relativo promedio agregado que ha sido señalada en la ecuación [7], y tomando el *IDIR* según la ecuación [9], podemos derivar el índice como una expresión de una medida objetiva. Esto es,

$$IDIR = 1 - \hat{R} \quad [10]$$

Así, un cambio en la distribución de ingresos, dado Y , que implique un incremento del ingreso relativo agregado, equivale a un aumento del ingreso promedio geométrico. Esto es, un incremento del bienestar social efectivo. A su vez, esto significaría que v se aproxima a μ , ya que la relación media aritmética y media geométrica, para toda distribución, verifica (Karelin, Rondero, & Tarasenko, 2008):

$$\frac{y_1 + \dots + y_I}{I} \geq \sqrt[I]{y_1 \times \dots \times y_I} \quad [11]$$

Nótese, según [11], la equiparación de ambas medidas ocurrirá sólo si se da la igualdad de ingresos entre los receptores, esto es $y_1 = \dots = y_I$. El bienestar social efectivo es socialmente óptimo. En este caso único, se obtiene un $IDIR = 0$. Luego, para cualquier otro caso, se obtiene $0 < IDIR \leq 1$. Además, si algún receptor no percibe ingreso $y_i = 0$, entonces por definición se tiene $IDIR = 1$. Esto es, dado el marco informacional de la función de bienestar social, para dicha distribución existe un receptor que no ha salido del *statu - quo*. No interesa como se distribuye el ingreso entre el resto de individuos.⁹ El mismo resultado se obtendrá si el ingreso total Y^0 le corresponde sólo a un único receptor mientras que el resto de receptores posee cero ingresos.

En consecuencia, si existe igualdad en la distribución de ingresos entre los receptores el índice será $IDIR = 0$ y si se tiene que el ingreso total le corresponde a un solo receptor entonces el índice será $IDIR = 1$. Luego, el índice de desigualdad estará acotado entre 0 y 1, esto es $IDIR \in [0,1]$.

Por razones pedagógicas se muestra una representación gráfica. Para tal caso supondremos una sociedad donde $I = 2$ y la distribución de ingresos viene dada por el vector $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, y_2^0)$, donde $y_1^0 < y_2^0$ y $y_1^0 + y_2^0 = Y^0$. La figura [1] muestra la relación media aritmética – media

⁹ Claramente, nuestro índice de desigualdad tiene implícitamente un juicio de valor a lo Rawls. Esto, evidentemente es una ventaja sobre los índices positivos como el Gini, el cual para distribuciones diferentes donde existen perceptores con ingreso cero arroja resultados de “menor desigualdad”, aun cuando los peores posicionados en la distribución de ingresos en la sociedad no hayan mejorado su *statu-quo*.

geométrica y su relación con la función de bienestar de Nash, siendo la función de bienestar de

Nash generalizado igual a $\mathcal{F}(u_1, u_2) = \sqrt{y_1 y_2}$.

Elaboración propia.

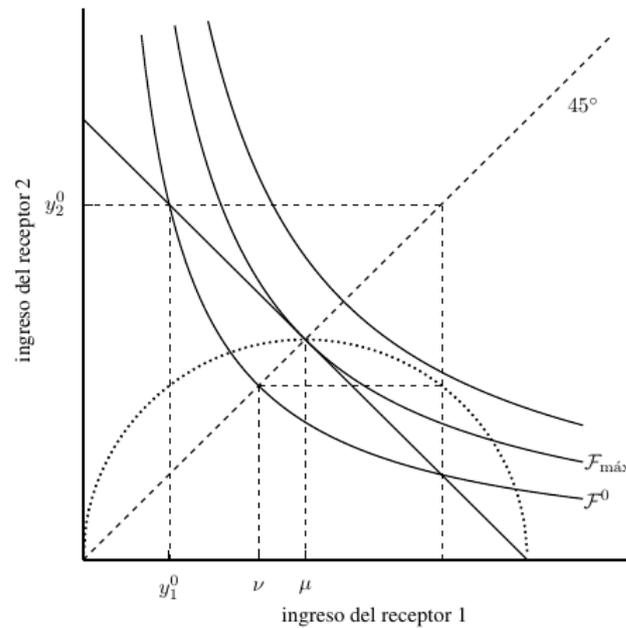


Figura 1. Relación $\mu - \nu$ como índice de desigualdad.

3. Propiedades

Siguiendo a Villar (2017), podemos verificar cuáles son las propiedades que el *IDIR* cumple. De acuerdo a las demostraciones desarrolladas en el anexo A, podemos afirmar que el índice de Desigualdad del Ingreso Relativo verifica las propiedades de normalización, de simetría, del principio de transferencia de Dalton, de continuidad y de independencia de escala. Por otro lado, el mismo índice incumple las propiedades del principio de réplica de poblaciones y la de descomponibilidad.¹⁰

CÁLCULOS DEL ÍNDICE BAJO DISTRIBUCIONES SIMULADAS

Considerando que en los países subdesarrollados con mayor recurrencia las distribuciones de ingresos efectivas se describen mediante distribuciones con una mayor asimetría (Figuroa, 1993), realizaremos simulaciones tomando como aproximaciones de las distribuciones de ingreso, las distribuciones estadísticas de Pareto, la log normal y la log logística. Las

¹⁰ Esto no es grave, pues es importante señalar que el de mayor uso en la Economía para medir la desigualdad, el índice de Gini, también incumple la propiedad de descomponibilidad aditiva (Villar, 2017).

simulaciones se realizarán sobre una muestra aleatoria de tamaño $n = 1000000$ observaciones, escogidos para un rango de ingresos establecido arbitrariamente y utilizando las librerías del programa R para cada distribución.

Además, estas distribuciones teóricas presentan buenas propiedades estadísticas, asimismo algunas de ellas presentan un buen ajuste a las distribuciones empíricas. En este sentido, es recurrente el uso de estas distribuciones en la literatura sobre la distribución, no sólo para simulaciones sino además, para realizar ajustes estadísticos (Campano & Salvatore, 2006; Cowell, 2013; Gasparini, Cicowiez & Sosa, 2013).

Asimismo, calcularemos para efectos de una comparación posterior, el índice de desigualdad de Gini para cada una de las distribuciones simuladas.¹¹ La comparación de los resultados simulados del GINI y del IDIR nos permitirá ver que tan bien se comporta este último al medir la desigualdad.

Distribución de Pareto

Dada la función de densidad de probabilidad de Pareto (Dagum, 1980; Cowell, 2011):

$$p(y; \mu, \sigma) = \alpha \frac{y_m^\alpha}{y^{\alpha+1}} \quad [12]$$

Donde $y > y_m$, $\alpha > 0$ y σ como un parámetro de escala, directamente proporcional a la varianza de la distribución.

Para una simulación de $n = 1000000$ receptores,¹² supondremos cuatro distribuciones de ingresos entre los receptores, las que se construirán arbitrariamente. Así, por ejemplo, para la primera distribución se considerará un intervalo de ingresos entre 0 y 1200, tal como se observa en la figura 2a; de tal manera que podamos tener la certeza de que la variabilidad de los parámetros de la distribución cuenta con una adecuada representatividad, donde las cuatro distribuciones se han simulado con una escala igual a $scale = 1000$. Utilizando el software R obtenemos para cada una de las distribuciones, que corresponden a cada uno los diferentes valores de los parámetros tomados como argumentos, los siguientes resultados:¹³

Tabla 1. Resultados de las simulaciones para una distribución de Pareto

¹¹ Para el cálculo del índice de desigualdad de Gini en las siguientes simulaciones se utilizará la librería *ineq*, con la orden `ineq(x, type = "Gini")`.

¹² Independiente del tamaño de la muestra en la simulación, lo pertinente para la simulación es que la distribución teórica conserve las propiedades deseables para efectos de que represente una distribución empírica, como es el caso de la asimetría.

¹³ Se hace uso de las librerías *actuar* y *distrEx*, con la orden `rpareto(n, shape, scale)`.

Medida	Distribución 1	Distribución 2	Distribución 3	Distribución 4
ν	8.88	36.24	159.60	996.91
μ	15.89	66.82	333.55	9192.97
σ	16.19	71.72	468.52	152725.10
<i>GINI</i>	0.5038	0.5165	0.5726	0.8911
<i>IDIR</i>	0.4410	0.4576	0.5215	0.8916

Para la simulación de distribución 1 tenemos una media geométrica igual a $\nu = 8.88$, una media aritmética igual a $\mu = 15.89$ y una desviación estándar igual a $\sigma = 16.19$. Luego, de acuerdo a lo formulado en las ecuaciones 9 y 10 obtenemos el *IDIR* igual a 0.4410. En tanto que el *GINI* calculado es igual a 0.5038 aplicando el procedimiento señalado en la nota de pie 11. Para el resto de las distribuciones simuladas, se tienen las mismas interpretaciones. Es importante notar que, de acuerdo a la desviación estándar, se tratan se distribuciones simuladas con una dispersión cada vez mayor. Así, la distribución 4 es la que posee una mayor dispersión con un $\sigma = 152\,275.10$. Esta mayor dispersión de las distribuciones se hará evidente al calcular un mayor *IDIR* y un mayor *GINI* respectivamente.

En las figuras 2.a – 2.d se representan las distribuciones y las curvas de Lorenz para cada una de las cuatro simulaciones bajo una distribución de ingreso de Pareto.

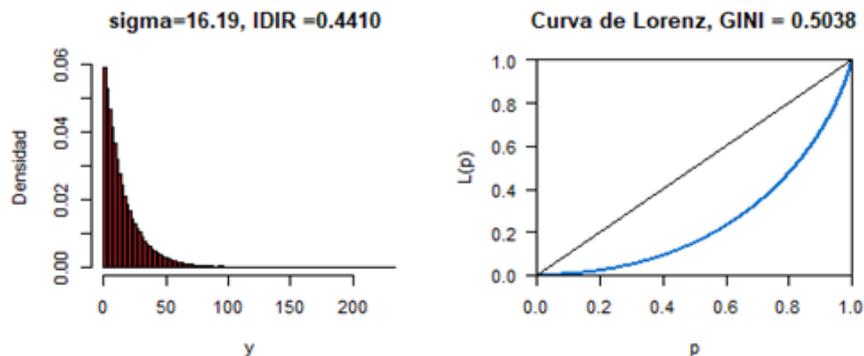


Figura 2a. Distribución de Pareto y curva de Lorenz

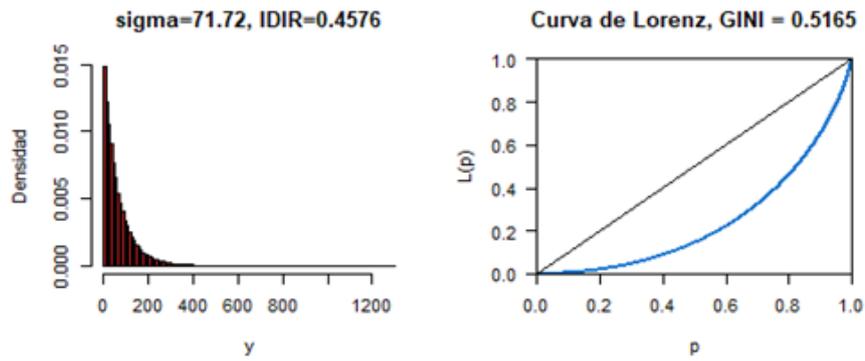


Figura 2b. Distribución de Pareto y curva de Lorenz

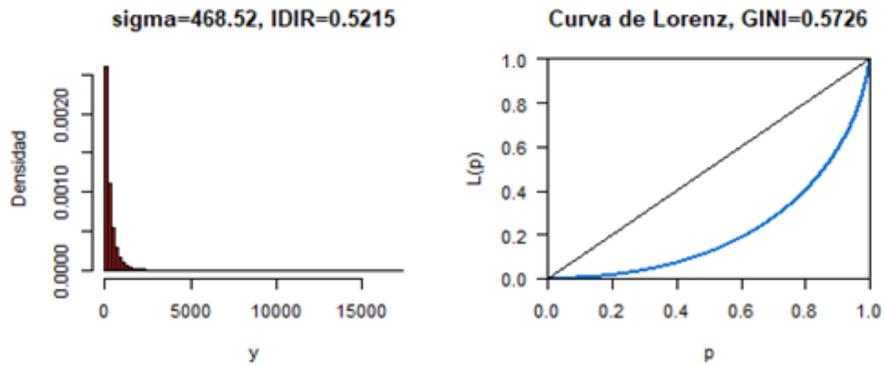


Figura 2c. Distribución de Pareto y curva de Lorenz

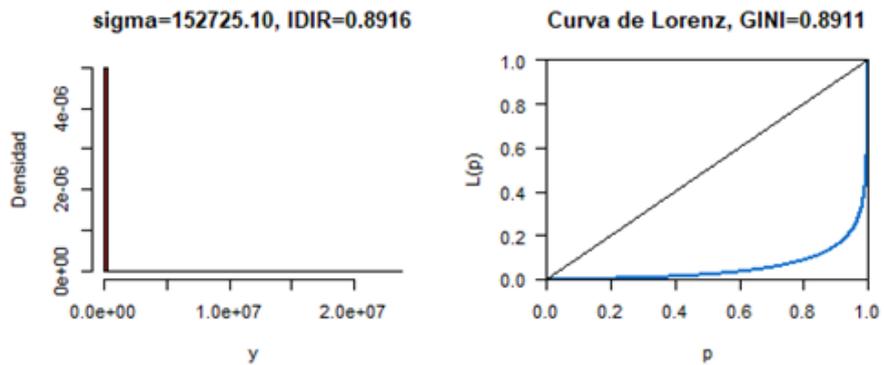


Figura 2d. Distribución de Pareto y curva de Lorenz

De acuerdo a los resultados obtenidos bajo la distribución de Pareto, la cual es asimétrica, se observa que en la medida que la dispersión de los ingresos y el índice *GINI* sean mayores, el *IDIR* también aumenta. Por cada punto porcentual que aumenta la desigualdad, entre una y otra distribución, según el índice de *GINI*, el *IDIR* responde con incrementos relativamente positivos y se hace menos sensible para distribuciones altamente desiguales:

Tabla 2. Sensibilidad del *IDIR* ante un aumento de *GINI* en un punto porcentual

De la distribución 1 a 2	De la distribución 2 a 3	De la distribución 3 a 4
1.4932	1.2856	1.2759

En la primera simulación, como desarrollamos en la parte teórica, un IDIR calculado igual a 0.4411 supone una diferencia entre el bienestar máximo y el bienestar efectivo de 10 a 6; en tanto que un IDIR igual a 0.8916, tal como se obtiene en la distribución 4, supone una brecha mayor entre el bienestar máximo y el bienestar efectivo, de 10 a 2. Así, en la medida que el IDIR sea mayor, el bienestar social es menor.

Distribución log normal

Ahora consideraremos una distribución log normal (Evans & Rosenthal, 2004),

$$f(y; \mu, \sigma) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2} \quad [13]$$

donde $y > 0$; siendo, para esta distribución, μ y σ la media aritmética y la desviación estándar del logaritmo de la variable.

Para una simulación de $n = 1000000$ receptores, supondremos cuatro distribuciones de ingresos entre receptores, las cuatro distribuciones con un log ingreso medio $\mu = 3$ aproximadamente, pero con diferentes desviaciones estándar. Utilizando el software R obtenemos los siguientes resultados:¹⁴

Tabla 3. Resultados de la simulación para una distribución log normal

Medida	Distribución 1	Distribución 2	Distribución 3	Distribución 4
v'	20.05	20.03	20.02	22.41
μ'	33.18	62.13	445.91	224101
σ'	44.21	179.70	5522.37	15917870
<i>GINI</i>	0.5225	0.7122	0.9214	0.9969
<i>IDIR</i>	0.3956	0.6776	0.9551	0.9999

donde μ' y v' son las notaciones correspondientes a la media aritmética y la media geométrica de la distribución de ingresos. A continuación, representamos las distribuciones log normal y sus respectivas curvas de Lorenz en las figuras 3a – 3d.

¹⁴ Para esta simulación usamos la orden `rlnorm(n, meanlog, sdlog)`.

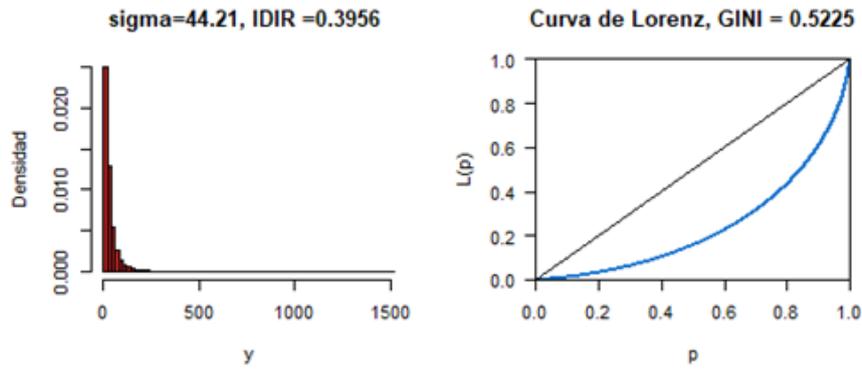


Figura 3a. Distribución log normal y curva de Lorenz

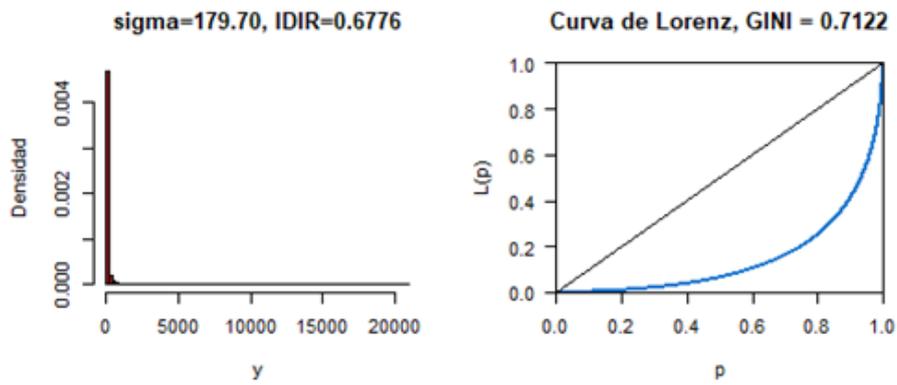


Figura 3b. Distribución log normal y curva de Lorenz

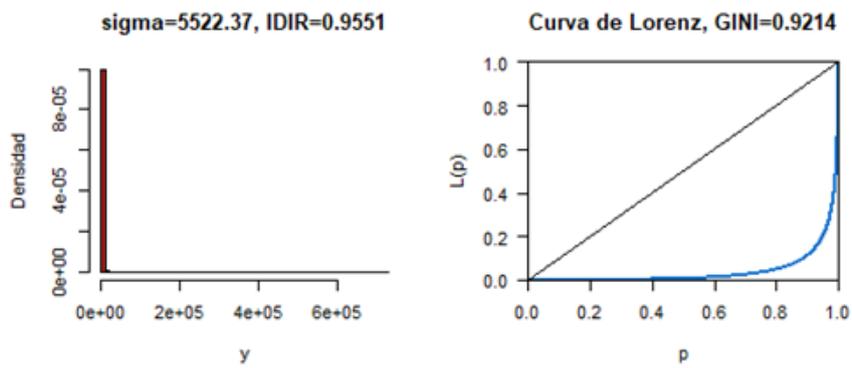


Figura 3c. Distribución log normal y curva de Lorenz

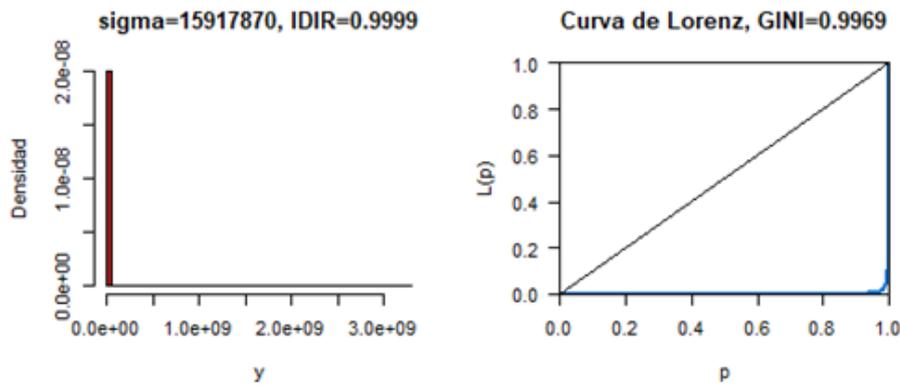


Figura 3d. Distribución log normal y curva de Lorenz

Observamos, que la mayor dispersión de cada distribución recogida por la desviación estándar σ presentada en el Tabla 3, en las figuras 3a, 3b, 3c y 3d se recoge con una curva de Lorenz con una mayor distancia vertical respecto a la línea de igualdad respectivamente. Es decir, la distribución 4 presenta una mayor desigualdad que la distribución 3, esta respecto a la distribución 2 y esta mayor que la primera. Vamos de una simulación de distribución de mayor a menor dispersión y en consecuencia, de acuerdo a la curva de Lorenz, de menor a mayor desigualdad. Nótese además, que en las distribuciones log normal que hemos simulado manteniendo constante el log medio, no suponemos un ingreso aritmético constante de los ingresos, ya que en la medida que aumentamos la dispersión en la distribución log normal, implicará ingresos máximos e ingresos mínimos con mayores amplitudes. Así, para las cuatro distribuciones simuladas con dispersiones $\sigma = \ln \sigma_n$, donde σ_n corresponde a las dispersiones de las cuatro distribuciones normales simuladas, se tiene como resultado un *IDIR* cada vez mayor

Es decir, la mayor amplitud y dispersión que recoge la distribución log normal es penalizada por el *IDIR* en mayor medida aunque con menor sensibilidad cada vez. Así, por cada punto porcentual que aumenta la desigualdad de la distribución, entre una y otra, según el índice de desigualdad de *GINI*, el *IDIR* también aumenta pero con incrementos relativamente cada vez menores, tal como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 4. Sensibilidad del *IDIR* ante un aumento de *GINI* en un punto porcentual

De la distribución 1 a 2	De la distribución 2 a 3	De la distribución 3 a 4
1.9634	1.3942	0.5724

Distribución log logística

Finalmente, simularemos que la distribución de ingresos sigue una distribución log logística (Campano & Salvatore, 2006),

$$l(y; m, k) = \frac{e^{-\frac{\ln y - m}{k}}}{ky \left(e^{-\frac{\ln y - m}{k}} + 1 \right)^2} \quad [14]$$

donde $k > 0$ es el parámetro de escala y m es el logaritmo del ingreso mediano.

Siguiendo el algoritmo, para una simulación de $n = 1000000$ receptores, supondremos cuatro distribuciones de ingresos entre los receptores, donde las cuatro distribuciones se han simulado con una escala igual a $scale = 10$. Utilizando el software R obtenemos los siguientes resultados:¹⁵

Tabla 5. Resultados de la simulación para una distribución log logística

Medida	Distribución 1	Distribución 2	Distribución 3	Distribución 4
ν	0.0998	0.1003	0.1001	0.0992
μ	0.1319	0.2394	1.1606	17.4869
σ	0.1691	3.1253	50.2249	3153.64
<i>GINI</i>	0.3996	0.6623	0.9139	0.9909
<i>IDIR</i>	0.2430	0.5809	0.9137	0.9943

Presentamos las distribuciones log logísticas simuladas y sus respectivas curvas de Lorenz en las figuras 4a – 4d.

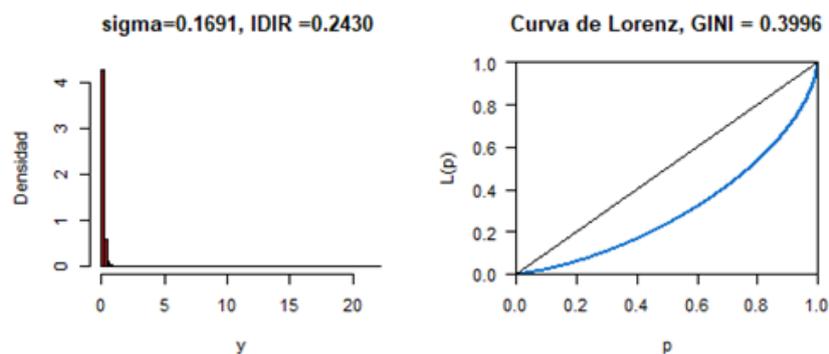


Figura 4a. Distribución log logística y curva de Lorenz

¹⁵ Se hace uso de la librería *survival*, con la orden `rllogis(n, shape, scale)`.

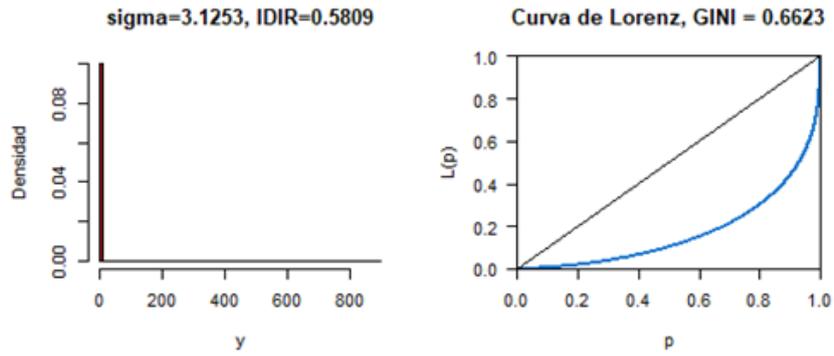


Figura 4b. Distribución log logística y curva de Lorenz

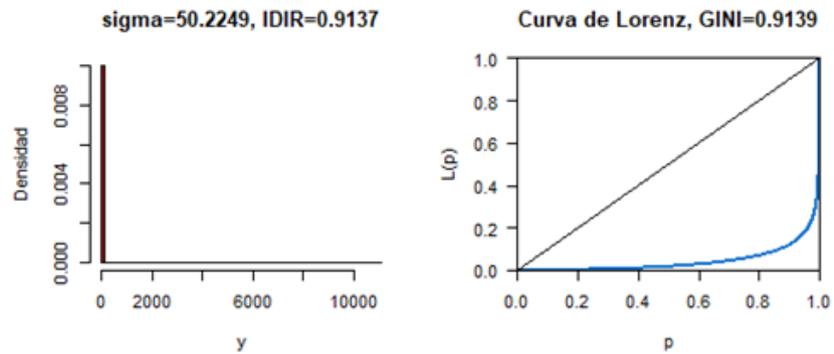


Figura 4c. Distribución log logística y curva de Lorenz

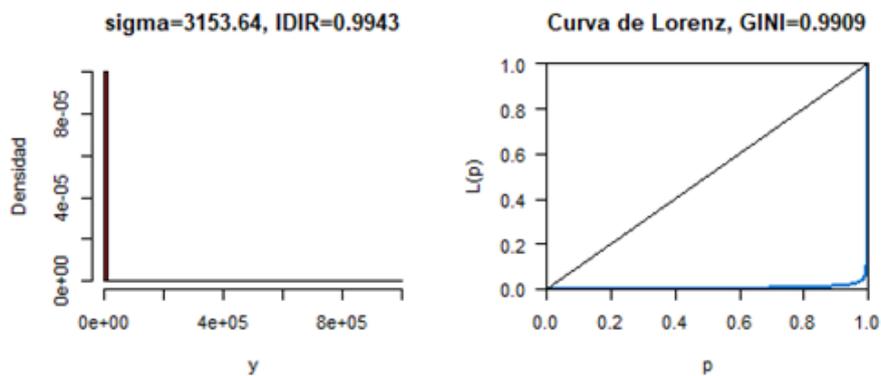


Figura 4d. Distribución log logística y curva de Lorenz

En la tabla anterior, se observa, al igual que en las anteriores simulaciones, que en la medida que aumenta la dispersión de la distribución, el *IDIR* también aumenta. Asimismo, para la distribución log logística, la sensibilidad de la respuesta del *IDIR* es positiva pero cada vez menor por cada punto porcentual que aumenta la desigualdad de la distribución, entre una y otra, según el índice de *GINI*. Entonces, el *IDIR* responde con incrementos relativamente cada vez menores:

Tabla 6. Sensibilidad del IDIR ante un aumento de GINI en un punto porcentual

De la distribución 1 a 2	De la distribución 2 a 3	De la distribución 3 a 4
2.1152	1.5081	1.0470

La relación IDIR y el GINI

Siguiendo a (Kendall & Stuart, 1977) se obtiene una medida de la dispersión llamada diferencia media. A partir de este concepto se puede plantear una forma de medir el índice de Gini basado en la diferencia media. Luego, dadas ciertas propiedades de esta forma de medición será posible plantear el índice de Gini de la siguiente manera (Villar, 2017):¹⁶

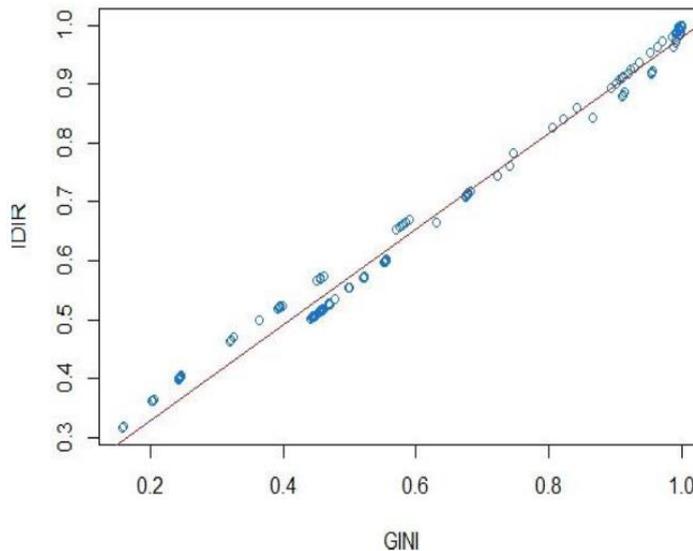
$$GINI = 1 - \frac{1}{\mu l^2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \min\{y_i, y_j\} \quad [15]$$

Luego, dado el índice de desigualdad *IDIR* formulado en la ecuación [9], podemos derivar, con objeto de presentar evidencia posteriormente, una relación lineal positiva entre los índices *IDIR* y *GINI*,

$$IDIR = \left(\frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \min\{y_i, y_j\} - vl^2}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \min\{y_i, y_j\}} \right) + \left(\frac{vl^2}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \min\{y_i, y_j\}} \right) GINI \quad [16]$$

Ahora, retomando las distribuciones de Pareto, la log normal y la log logística; y realizando un número mayor de simulaciones para cada una de las distribuciones, encontramos entre el *IDIR* y el *GINI* una coeficiente de correlación equivalente a $r_{GINI, IDIR} = 0.9918$.

Figura 5. Relación GINI – IDIR simulada



¹⁶ La notación de formulada por Villar (2017) ha sido adecuada a la notación del presente artículo para un mayor esclarecimiento.

EL CÁLCULO DEL IDIR PARA EL PERÚ, 2004-2017.

De los datos utilizados

Para efectos de la aplicación del índice propuesto se midió la desigualdad para cada uno de los veinticuatro departamentos del Perú, para el periodo comprendido entre los años 2004 y 2017. La medición se realizó tomando como una unidad receptora a los hogares, y se toma como medida el ingresos que se calcula a partir de la información obtenida de las “Encuestas Nacionales de Hogares ENAHO” del 2004 al 2017 implementadas por el Instituto Nacional de Estadística e Informática del Perú.

En nuestro cálculo tomaremos como objeto de medición el ingreso del hogar, denotado como *ingtot* según la codificación de la ENAHO. Este ingreso posee la siguiente composición:

1. Ingreso de trabajo (*ingtrab*):

1.1. Ingreso de trabajo salarial (*ingtrabw*):

$$\text{ingtrabw} = \text{ingnethd} + \text{pagesphd} + \text{insedlhd} + \text{paesechd}$$

donde:

ingnethd: ingreso monetario neto de la actividad principal dependiente.

pagesphd: ingreso por pago en especie de la actividad principal dependiente.

insedlhd: ingreso neto de la actividad secundaria dependiente.

paesechd: ingreso pago en especie de la actividad secundaria dependiente.

1.2. Ingreso de trabajo no salarial (*ingtrabs*):

$$\text{ingtrabs} = \text{ingindh} + \text{ingauthd} + \text{ingseihd} + \text{isecauhd}$$

donde:

ingindh: ingreso por actividad principal independiente.

ingauthd: ingreso por autoconsumo de la actividad principal independiente.

ingseihd: ingreso neto de la actividad secundaria independiente.

isecauhd: ingreso por autoconsumo de la actividad secundaria independiente.

$$\text{ingtrab} = \text{ingtrabw} + \text{ingtrabs}$$

2. Ingreso de propiedad (*ingprop*):

$$\text{ingprop} = \text{ingrenhd} + \text{ia01hd}$$

donde:

ingrenhd: ingreso monetario por rentas de la propiedad.

ia01hd: ingreso alquiler imputado de la vivienda.

3. Ingreso de transferencias privadas (trapriv):

$$\text{trapriv} = \text{ingtrahd} + \text{ingtexhd} + \text{ia02hd}$$

donde:

ingtrahd: ingreso por transferencias corrientes monetarias del país.

ingtexhd: ingreso por transferencias corrientes del extranjero.

ia02hd: ingreso por transferencia de alquiler.

4. Ingreso extraordinario (ingextr):

$$\text{ingextr} = \text{ingexthd} + \text{ingoexhd}$$

donde:

ingexthd: ingresos extraordinarios por trabajo.

ingoexhd: otros ingresos extraordinarios.

Finalmente, obtenemos nuestro ingreso total del hogar:

$$\text{ingtot} = \text{ingtrab} + \text{ingprop} + \text{trapriv} + \text{ingextr}$$

Los resultados del cálculo del IDIR departamental

Al utilizar la variable “ingreso ingtot” para calcular el *IDIR* de cada departamento del Perú, para el periodo 2004 – 2017, se han obtenido resultados cuyo resumen estadístico se presenta en el Tabla 7. De acuerdo al resumen, los departamentos que presentan una menor desigualdad, en promedio, son Ica (0.22), Tumbes (0.24), Lambayeque (0.27) y Madre de Dios (0.27). En tanto que, Ayacucho (0.41), Huánuco (0.40), Puno (0.40) y Cajamarca (0.41) presentan un índice mayor. Del primer grupo de departamentos, los tres primeros se ubican en la costa del Perú y su actividad económica presenta una importante participación de la agroindustria; en tanto que del segundo, todos se ubican en la sierra, donde es preponderante la actividad minera.

Tabla 7. Medidas estadísticas del *IDIR* por departamento

DPTO	mean	sd	median	min	max	range	skew	kurtosis
AMA	0.36	0.02	0.36	0.32	0.41	0.09	0.51	0.51
ANC	0.36	0.03	0.36	0.30	0.42	0.12	-0.28	-0.88
APU	0.39	0.07	0.38	0.31	0.52	0.21	0.53	-0.95
ARE	0.31	0.04	0.31	0.24	0.38	0.14	-0.02	-0.65
AYA	0.40	0.03	0.40	0.37	0.46	0.09	0.55	-0.97

CAJ	0.41	0.03	0.41	0.36	0.45	0.09	-0.11	-1.50
CUS	0.38	0.03	0.38	0.35	0.42	0.07	0.00	-1.52
HCV	0.39	0.05	0.40	0.32	0.46	0.14	-0.25	-1.26
HUA	0.40	0.04	0.39	0.36	0.48	0.13	0.80	-0.37
ICA	0.22	0.04	0.21	0.16	0.29	0.13	0.25	-1.48
JUN	0.32	0.03	0.32	0.27	0.36	0.10	-0.05	-1.02
LAM	0.27	0.02	0.26	0.24	0.31	0.07	0.44	-1.48
LIM	0.29	0.03	0.30	0.26	0.34	0.08	0.07	-1.30
LLI	0.37	0.04	0.36	0.33	0.47	0.14	1.76	2.78
LOR	0.38	0.02	0.38	0.34	0.42	0.07	0.23	-0.99
MDI	0.27	0.03	0.26	0.23	0.31	0.08	0.00	-1.58
MOQ	0.40	0.02	0.40	0.37	0.46	0.07	0.59	-0.46
PAS	0.35	0.03	0.35	0.31	0.42	0.11	0.75	-0.28
PIU	0.32	0.02	0.32	0.28	0.35	0.07	-0.41	-1.04
PUN	0.40	0.03	0.39	0.37	0.46	0.10	0.73	-0.36
SMA	0.37	0.04	0.37	0.32	0.43	0.12	-0.03	-1.21
TAC	0.30	0.02	0.30	0.26	0.34	0.08	0.02	-1.29
TUM	0.24	0.02	0.25	0.21	0.27	0.05	-0.46	-0.92
UCA	0.28	0.06	0.27	0.20	0.38	0.18	0.29	-1.55

Por otro lado, durante el periodo de estudio no todos los departamentos evidencian el mismo patrón de comportamiento de la desigualdad según el *IDIR*. Por ejemplo, Apurímac evidencia una mayor variabilidad, posee una desviación estándar de 0.7 y tiene una caja de bigotes con un mayor recorrido intercuartílico. En tanto que, el departamento de Amazonas es uno de los que presenta una menor variabilidad, 0.2, y un rango de 0.09.¹⁷

Para un mayor detalle de los resultados del cálculo obtenido para cada departamento y para cada año entre el 2004 y el 2017, véase el anexo B.

La estimación de la relación entre el *IDIR* y el *GINI*

El índice de ingreso relativo, para efectos de la aplicación, muestra una relación estrecha con el índice de Gini tal cual se obtuvo en las simulaciones para el caso de la distribución del ingreso ingtot. Es decir, tan igual como el *GINI*, el *IDIR* mide la desigualdad.¹⁸ Así, el coeficiente de correlación estimado para Perú es,

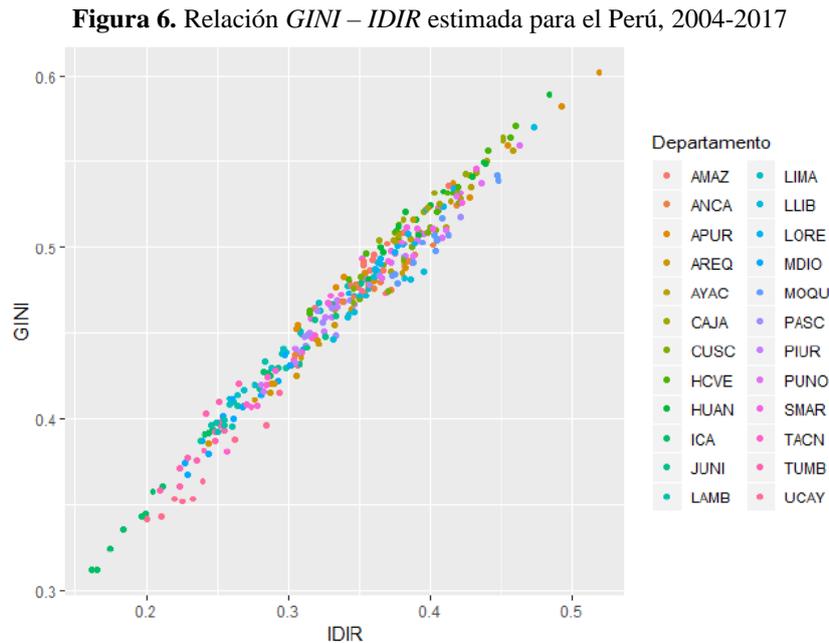
¹⁷ Ver figura 1.B del anexo B.

¹⁸ Para efectos de la estimación del coeficiente de *GINI* se ha aplicado la fórmula siguiente:

$$GINI = 1 + \frac{1}{I} - \left(\frac{2}{\mu - I^2} \right) \left(\sum_{i=1}^I (i - i + 1)y_i \right)$$

$$\text{cor} (IDIR, GINI) = 0.986153$$

Sin embargo, a diferencia del *GINI*, el *IDIR* penaliza más la desigualdad, asignándole un número menor a distribuciones más desiguales. En términos de mejora de la distribución, la sociedad deberá mejorar mucho más para escalar en el índice *IDIR*. Véase la relación estimada en la figura 6.



De los resultados

De acuerdo a los cálculos efectuados para los departamentos del Perú, el índice de desigualdad de ingresos *IDIR* evidencia una heterogeneidad entre estos, lo cual es concordante con la literatura sobre la desigualdad en el Perú (Contreras et. al., 2015). Asimismo, siguiendo con la misma base de datos, el cálculo del índice propuesto muestra una relación positiva estrecha con el cálculo del índice de desigualdad de Gini departamental, llegando a obtenerse un coeficiente de correlación superior a 0.99. En este sentido, se tiene que, para distribuciones de ingresos con un índice de *GINI* mayor, le corresponde un índice *IDIR* mayor.

Así, los cálculos obtenidos para el Perú se comportan según los resultados que derivamos en las simulaciones efectuadas, evidenciándose empíricamente la relación lineal estrecha entre el *IDIR* y el índice de *GINI* tal cual se había obtenido en las simulaciones. Compárese las figuras 5 y 6.

CONCLUSIONES

El trabajo propone una medida de la desigualdad de ingresos fundamentada en la economía del bienestar pero medible a través de estadísticos descriptivos. Asimismo, el índice propuesto recoge, a la luz de las simulaciones realizadas, la información que provee la mayor dispersión de ingresos asignándole a la distribución un mayor índice en la medida que sea mayor la desigualdad, según muestran las medidas simuladas del *GINI* en cada distribución. Por lo tanto, es un índice que penaliza con un mayor índice a las distribuciones más desiguales.

Por otro lado, el índice podría ser limitado para distribuciones donde no existen receptores con ingreso cero. Esto no sería una limitación desde una óptica de la justicia distributiva. Aun así, es posible extender la definición de receptor, por ejemplo trabajar con cuantiles, y sortear esta supuesta limitación. Se obtendría, en este caso valores positivos para el *IDIR*, aun sí las distribuciones contemplan receptores con un ingreso igual a cero. Y lo más importante, se efectúa distinguiendo las distribuciones más desiguales de las menos desiguales.

Un aporte de este índice no sólo es su simplicidad desde el punto de vista estadístico, sino que además, tiene la ventaja de estar fundamentado en un marco informacional de la teoría del bienestar social, específicamente en la función de bienestar social de Nash. Así, el ratio media geométrica – media aritmética, puede interpretarse como una lectura entre el bienestar social efectivo y el bienestar social máximo, lo cual es una ventaja sobre cualquier índice de desigualdad positivo, incluido el Gini, que carecen de una lectura explícita en términos de bienestar.

Asimismo, el *IDIR* complementa y fundamenta el caso particular del índice de Atkinson, cuando el índice de aversión a la desigualdad es igual a uno. Por lo tanto, da cuenta, más allá de una suposición, el por qué debiéramos utilizar, para estimaciones bajo el índice de Atkinson, un parámetro de aversión igual a uno, cuando se mida como una brecha entre el bienestar social efectivo y el bienestar social máximo. Se tendría así, un respaldo empírico que fundamente por qué debiéramos tomar $\epsilon = 1$.

Finalmente, si bien el índice *IDIR* no cumple todas las propiedades deseables, entre ellas la descomponibilidad aditiva, sí cumple una propiedad muy importante: el principio de transferencia de Dalton, siendo útil para evaluar el impacto de las políticas redistributivas sobre la desigualdad.

Referencias

Allison, P. D. (1978). Measures of inequality. *American Sociological Review*, 43(6), 865-880.

- Arrow, K. (1971). *General Competitive Analysis*. New York: North Holland.
- Atkinson, A. (1970). On the Measurement of Inequality. *Journal of Economic Theory*, 2(3), 244-263.
- Atuesta, B; Mancero, X. & Tromben, V. (2018). *Herramientas para análisis de las desigualdades y del efecto redistributivo de las políticas públicas*. Documentos de Proyectos, Comisión Económica para América Latina y el Caribe.
- Campano, F., & Salvatore, D. (2006). *Income Distribution*. New York: Oxford University Press.
- Contreras, C. et al (2015). *La desigualdad de la distribución de ingresos en el Perú. Orígenes históricos y dinámica política y económica*. Lima: Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Cowell, F. A. (2013). *Measuring Inequality*. New York: Oxford University Press, 3rd ed.
- Dagum, C. (1980). Sistemas generadores de distribución del ingreso y la ley de Pareto. *El Trimestre Económico*, 47(188), 877-917.
- Dalton, H. (1920). The Measurement of Inequality of Income. *The Economic Journal*, 30(119), 348-361.
- Evans, M. J. & Rosenthal, J. S. (2004). *Probability and Statistic. The Science of Uncertainty*. New York: W. H. Freeman and Company.
- Figueroa, A. (1993). *Crisis distributiva en el Perú*. Lima: Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Gasparini, L., Cicowiez, M. & Sosa, W. (2013). *Pobreza y desigualdad en América Latina*. Buenos Aires: Temas Grupo Editorial.
- Guerrero, V. M. (1987). A Note on the Estimation of Atkinson's Index of Inequality. *Economics Letters*, 25(4), 379-384.
- Jasso, G. (1980). A New Theory of Distributive Justice. *American Sociological Review*, 45(1), 3-32.
- Jasso, G. (1982). Measuring Inequality. *Sociological Methods & Research*, 10(3), 303-326.
- Karelin, O., Rondero, C., & Tarasenko, A. (2008). *Desigualdades. Método de cálculo no tradicionales*. Madrid: Ediciones Díaz de Santos.
- Kendall, M., & Stuart, A. (1977). *The Advanced Theory of Statistics. Volumen I*. London: Charles Griffin.
- Maskin, E. S. (1976). *Social Welfare Functions on Restricted Domains*. Massachusetts: Harvard University.

- Medina, F. (2001). *Consideraciones sobre el índice de Gini para medir la concentración del ingreso*. Serie Estudios Estadísticos y Prospectivos 9, Comisión Económica para América Latina, División de Estadística y Proyecciones Económicas.
- Milanovic, B. (1997). A Simple Way to Calculate the Gini Coefficient, and Some Implications. *Economics Letters*, 56(1), 45-49.
- Nash, J. (1950). The Bargaining Problem. *Econometrica*, 18(2), 155-162.
- Sen, A. & Foster, J. (1997). *On Economic Inequality*. Oxford: Oxford University Press.
- Subramanian, S. (2004). *Indicators of Inequality and Poverty*. Research Paper, United Nations University, World Institute for Development Economic Research.
- Villar, A. (2017). *Lectures on Inequality, Poverty and Welfare*. Cham: Springer International Publishing.
- Weymark, J. (2016). Social Welfare Functions. En M. D. Adler, *The Oxford Handbook of Well-Being and Public Policy* (págs. 1-37). Oxford: Oxford University Press.

ANEXOS

ANEXO A. PROPIEDADES PARA EL ÍNDICE DE DESIGUALDAD DEL INGRESO RELATIVO

Empezaremos por las propiedades que se verifican:

Propiedad 1 (Normalización). Dada la sociedad de I receptores, si para todo $i \in I$ se tiene $y_i = \mu$, entonces,

$$IDIR(I, (\mu_1, \dots, \mu_2)) = 0 \quad [A. 1]$$

Demostración

Si $(y_1, \dots, y_2) = (\mu, \dots, \mu)$, luego la media aritmética será $\mu = (I\mu)I^{-1} = \mu$ y la media geométrica será $\nu = (\mu^I)^{\frac{1}{I}} = \mu$. Entonces, $IDIR = 1 - \frac{\nu}{\mu} = 0$ ■

Propiedad 2 (Simetría). Dada la sociedad de I receptores, sean las distribuciones de ingreso \mathbf{y} y \mathbf{y}' , donde el vector de ingresos $\mathbf{y}' = Perm(\mathbf{y})$. Entonces, $IDIR(I, \mathbf{y}) = IDIR(I, \mathbf{y}')$.

Demostración

Sea $\mu(I, \mathbf{y}) = \mu$ y $\nu(I, \mathbf{y}) = \nu$. Luego, para una permutación de \mathbf{y} como lo es \mathbf{y}' , se tendrá $\mu(I, \mathbf{y}') = \mu'$ y $\nu(I, \mathbf{y}') = \nu'$. Entonces, para cada distribución de ingresos $IDIR(I, \mathbf{y}) = IDIR$ y

$IDIR(I, \mathbf{y}') = IDIR'$. Dada la propiedad conmutativa de la suma y del producto no se ve afectado por el resultado. Entonces, $IDIR(I, \mathbf{y}) = IDIR'(I, \mathbf{y}')$. ■

Propiedad 3 (Principio de las transferencias de Dalton). Dada la sociedad de I receptores, sea \mathbf{y}_d la distribución de ingresos que se obtiene mediante una transferencia de Dalton a partir de \mathbf{y} . Luego, $IDIR(I, \mathbf{y}) > IDIR(I, \mathbf{y}_d)$.

Demostración

Dada la distribución de ingresos $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_i, y_{i+1}, \dots, y_I)$. Sea una transferencia de Dalton del receptor $i + 1$ al receptor i igual a $\delta = dy_i = -dy_{i+1} > 0$, tal que $\mathbf{y}_d = (y_1, \dots, y_i + \delta, y_{i+1} - \delta, \dots, y_I)$. Luego,

$$dIDIR = -\frac{1}{\mu} dv + \frac{v}{\mu^2} d\mu \quad [A.2]$$

Además, como $d\mu = \frac{1}{I}(dy_i + dy_{i+1}) = \frac{1}{I}(\delta - \delta)$, entonces $d\mu = 0$. Por otro lado, se tiene $\frac{v}{I} \left(\frac{dy_i}{y_i} + \frac{dy_{i+1}}{y_{i+1}} \right) = \frac{v}{I} \left(\frac{\delta}{y_i} - \frac{\delta}{y_{i+1}} \right)$, quedando $dIDIR = \frac{\delta v}{I\mu} \left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{y_{i+1}} \right)$. Por tanto:

$$\frac{dIDIR}{\delta} < 0 \quad [A.3]$$

ya que $y_i < y_{i+1}$. Por tanto $IDIR(I, \mathbf{y}) = IDIR(I, \mathbf{y}_d)$. ■

Propiedad 4 (Continuidad). La función $IDIR(I, \mathbf{y})$ es continua en $\mathbf{y} \in R_{++}^I$.

Demostración

Dado que $\mathbf{y} \in R_{++}^I$, la función $IDIR(I, \mathbf{y}_d)$ es continua. ■

Propiedad 5 (Independencia de escala). Para todo escalar $\lambda > 0$, $IDIR(I, \mathbf{y}) = IDIR(I, \lambda \mathbf{y})$.

Demostración

Para la distribución \mathbf{y} se tendrá $\mu(I, \mathbf{y}) = \mu$. Luego, para $\lambda \mathbf{y}$ se tiene $\mu(I, \lambda \mathbf{y}) = \lambda \mu$. Por otro lado, para la distribución \mathbf{y} se obtiene $v(I, \mathbf{y}) = v$ y para $\lambda \mathbf{y}$ se tiene $v(I, \lambda \mathbf{y}) = \lambda v$. Por tanto $IDIR(I, \mathbf{y}) = 1 - \frac{\lambda v}{\lambda \mu}$. En consecuencia, $IDIR(I, \mathbf{y}) = IDIR(I, \lambda \mathbf{y})$. ■

En tanto que el $IDIR$ incumple las propiedades:

Propiedad 6 (Principio de réplica de las poblaciones). Dada una sociedad con I receptores y una distribución de ingresos \mathbf{y} . Considerando una nueva sociedad que consiste en una réplica k veces I con su correspondiente distribución de ingresos \mathbf{y}^k . Entonces, $IDIR(I, \mathbf{y}) = IDIR(kI, \mathbf{y}^k)$.

Demostración

Para \mathbf{y}^k se tiene $\mu(kI, \mathbf{y}^k) = \frac{\sum_i y_i + \dots + \sum_i y_i}{kI} = \frac{k \sum_i y_i}{kI}$, quedando $\mu(kI, \mathbf{y}^k) = \mu$. Además, $v(kI, \mathbf{y}^k) = (\prod_i y_i^k)^{\frac{1}{I}} = ((\prod_i y_i)^k)^{\frac{1}{I}}$, obteniendo $v(kI, \mathbf{y}^k) = v^k$. Luego,

$$IDIR(kI, \mathbf{y}^k) = 1 - \frac{v^k}{\mu} \quad [\text{A.4}]$$

por tanto $IDIR(I, \mathbf{y}) \neq IDIR(kI, \mathbf{y}^k)$. ■

Propiedad 7 (Descomponibilidad aditiva). Dada una sociedad de I receptores compuesta por H subgrupos de población, exhaustivos y mutuamente excluyentes, se cumple que:

$$IDIR(I, \mathbf{y}) = \sum_{h=1}^H w_h^H(\mu, I) IDIR(I_h, \mathbf{y}_h) + IDIR(I, \mu_1 I_1, \dots, \mu_H I_H) \quad [\text{A.5}]$$

para un conjunto de coeficientes w_h^H , que son funciones que dependen de μ , I y del número H de subgrupos de la partición.

Demostración

Para cada uno de los h grupos tendremos una distribución de ingresos \mathbf{y}_h , de donde $\mu_h = I_h^{-1} \sum_{i=1}^{I_h} y_i$ y $v_h = (\prod_{i=1}^{I_h} y_i)^{\frac{1}{I_h}}$. Por tanto, para un grupo h cualesquiera, tendremos un $IDIR_h = IDIR(I_h, \mathbf{y}_h)$. Este es,

$$IDIR(I_h, \mathbf{y}_h) = 1 - \frac{v_h}{\mu_h} \quad [\text{A.6}]$$

Luego,

$$\sum_{h=1}^H w_h^H(\mu, I) IDIR(I_h, \mathbf{y}_h) = 1 - \sum_{h=1}^H w_h^H \frac{v_h}{\mu_h} \quad [\text{A.7}]$$

donde $w_h^H = \frac{I_h}{I}$.

En tanto que,

$$IDIR(I, \mu_1 I_1, \dots, \mu_H I_H) = 1 - \frac{\prod_{h=1}^H \mu_h^{w_h}}{\sum_{h=1}^H w_h \mu_h} \quad [\text{A.8}]$$

Y dado que,

$$IDIR(I, \mathbf{y}) = 1 - \frac{\prod_{h=1}^H v_h^{w_h}}{\sum_{h=1}^H w_h \mu_h} \quad [\text{A.9}]$$

Se obtiene,

$$v \neq \prod_{h=1}^H \mu^{w_h} + \sum_{h=1}^H w_h \mu_h \sum_{h=1}^H w_h \frac{v_h}{\mu_h} \quad [\text{A.10}]$$

Por tanto,

$$IDIR(I, \mathbf{y}) \neq \sum_{h=1}^H w_h^H(\mu, I) IDIR(I_h, \mathbf{y}_h) + IDIR(I, \mu_1 I_1, \dots, \mu_H I_H) \quad [A.11]$$

El IDIR no verifica la descomponibilidad aditiva. ■

ANEXO B. RESULTADOS DE CÁLCULO DEL ÍNDICE DE DESIGUALDAD DEL INGRESO RELATIVO PARA EL PERÚ, A NIVEL DEPARTAMENTAL, 2004-2017.

Para facilitar la lectura de los resultados, se señala la notación asignada a cada departamento es la siguiente: Amazonas, AMA; Ancash, ANC; Apurímac, APU; Arequipa, ARE; Ayacucho, AYA; Cajamarca, CAJ; Cusco, CUS; Huancavelica, HCV; Huánuco, HUA; Ica, ICA; Junín, JUN; Lambayeque, LAM; Lima, LIM; La Libertad, LLI; Loreto, LOR; Madre de Dios, MDI; Moquegua, MOQ; Pasco, PAS; Piura, PIU; Puno, PUN; San Martín, SMA; Tacna, TAC; Tumbes, TUM y Ucayali, UCA.

A continuación, presentamos en las Tablas 1.B y 2.B, para los periodos 2004 – 2010 y 2011-2017 respectivamente, los cálculos del Índice del Ingreso Relativo de todos los departamentos del Perú. En la figura 1.B presentamos los gráficos de caja y bigotes del índice para cada departamento.

Tabla 1.B. Índice de desigualdad de ingreso relativo por departamento, 2004 – 2010.

	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
MDI	0.2291	TUM 0.2553	TUM 0.242	ICA 0.2437	ICA 0.2417	MDI 0.2269	ICA 0.2116
TUM	0.2651	ICA 0.2853	ICA 0.286	TUM 0.2510	TUM 0.2485	ICA 0.2466	MDI 0.2400
ICA	0.2831	LAM 0.2954	ARE 0.288	MDI 0.2611	MDI 0.2809	TUM 0.2487	TUM 0.2529
LAM	0.2837	MDI 0.3084	LAM 0.301	LAM 0.3093	LIM 0.2961	LAM 0.2607	TAC 0.2564
LIM	0.3061	SMA 0.3158	MDI 0.310	TAC 0.3174	LAM 0.2977	UCA 0.2936	UCA 0.2620
JUN	0.3186	ARE 0.3218	JUN 0.318	LIM 0.3216	UCA 0.3065	ANC 0.3020	LAM 0.2637
TAC	0.3189	JUN 0.3308	LIM 0.322	PIU 0.3389	TAC 0.3065	JUN 0.3027	JUN 0.2687
PIU	0.3260	PIU 0.3340	TAC 0.328	UCA 0.3522	PIU 0.3155	LIM 0.3093	LIM 0.3080
SMA	0.3299	TAC 0.3371	PIU 0.333	SMA 0.3522	ARE 0.3440	TAC 0.3095	PIU 0.3115
ARE	0.3318	LIM 0.3416	PAS 0.342	ARE 0.3538	LLI 0.3561	PIU 0.3306	ARE 0.3322
LOR	0.3424	LOR 0.3466	AM 0.344	PAS 0.3538	AM 0.3571	HUA 0.3562	PAS 0.3333
UCA	0.3451	PAS 0.3514	SMA 0.353	AM 0.3604	JUN 0.3606	LLI 0.3644	LLI 0.3470
CUS	0.3664	AM 0.3525	LOR 0.364	JUN 0.3641	LOR 0.3631	ARE 0.3801	ANC 0.3569
AMA	0.3695	CAJ 0.3772	UCA 0.367	ANC 0.3875	ANC 0.3722	PAS 0.3806	AYA 0.3716
CAJ	0.3742	UCA 0.3820	LLI 0.382	PUN 0.3956	SMA 0.3748	AMA 0.3807	SMA 0.3722
HUA	0.3758	LLI 0.3864	CAJ 0.394	LOR 0.3971	APU 0.3808	APU 0.3814	APU 0.3825
PAS	0.3820	CUS 0.3916	ANC 0.401	HUA 0.4090	PUN 0.3824	AYA 0.3862	LOR 0.3843
ANC	0.3890	MO 0.4062	MO 0.403	APU 0.4159	HUA 0.3896	CUS 0.3993	PUN 0.3872
AYA	0.3932	ANC 0.4185	CUS 0.419	CAJ 0.4190	CUS 0.3979	SMA 0.4049	HUA 0.3916
MOQ	0.3947	HUA 0.4379	AYA 0.428	HCV 0.4195	AYA 0.4103	HCV 0.4050	CUS 0.4037
LLI	0.3955	AYA 0.4380	PUN 0.435	CUS 0.4201	HCV 0.4147	PUN 0.4078	MO 0.4040
PUN	0.4217	HCV 0.4599	HCV 0.456	AYA 0.4216	PAS 0.4211	MOQ 0.4082	HCV 0.4114
HCV	0.4401	PUN 0.4631	HUA 0.483	MO 0.4473	MO 0.4466	LOR 0.4158	AM 0.4123
APU	0.4547	APU 0.4925	APU 0.518	LLI 0.4728	CAJ 0.4507	CAJ 0.4397	CAJ 0.4512

Tabla 2.B. Índice de desigualdad de ingreso relativo por departamento, 2011 – 2017.

	2011		2012		2013		2014		2015		2016		2017	
	ICA													
ICA	0.2046	0.1992	0.1747	0.1963	0.1837	0.1612	0.1645	0.1612	0.1837	0.1612	0.1612	0.1612	0.1612	0.1645
UCA	0.2202	0.2002	0.2111	0.2253	0.2232	0.2101	0.2235	0.2253	0.2232	0.2232	0.2101	0.2101	0.2101	0.2235
LAM	0.2503	0.2284	0.2353	0.2377	0.2324	0.2400	0.2443	0.2377	0.2324	0.2324	0.2400	0.2400	0.2400	0.2443
TUM	0.2518	0.2456	0.2544	0.2404	0.2584	0.2445	0.2492	0.2404	0.2584	0.2584	0.2445	0.2445	0.2445	0.2492
TAC	0.2735	0.2674	0.2549	0.2641	0.2603	0.2550	0.2582	0.2641	0.2603	0.2603	0.2550	0.2550	0.2550	0.2582
JUN	0.2797	0.2782	0.2767	0.2703	0.2616	0.2682	0.2845	0.2703	0.2616	0.2616	0.2682	0.2682	0.2682	0.2845
MDI	0.2975	0.2885	0.2872	0.2927	0.2764	0.2829	0.2847	0.2927	0.2764	0.2764	0.2829	0.2829	0.2829	0.2847
LIM	0.2979	0.3126	0.3035	0.2928	0.2810	0.2854	0.3007	0.2928	0.2810	0.2810	0.2854	0.2854	0.2854	0.3007
ARE	0.3091	0.3206	0.3068	0.3043	0.2909	0.2900	0.3044	0.3043	0.2909	0.2909	0.2900	0.2900	0.2900	0.3044
PIU	0.3249	0.3258	0.3079	0.3049	0.3042	0.3056	0.3062	0.3049	0.3042	0.3042	0.3056	0.3056	0.3056	0.3062
LLI	0.3311	0.3467	0.3501	0.3242	0.3133	0.3135	0.3152	0.3242	0.3133	0.3133	0.3135	0.3135	0.3135	0.3152
AMA	0.3489	0.3602	0.3535	0.3329	0.3155	0.3377	0.3185	0.3329	0.3155	0.3155	0.3377	0.3377	0.3377	0.3185
PA	0.3571	0.3645	0.3603	0.3408	0.3300	0.3423	0.3208	0.3408	0.3300	0.3300	0.3423	0.3423	0.3423	0.3208
LOR	0.3648	0.3647	0.3603	0.3426	0.3387	0.3507	0.3277	0.3426	0.3387	0.3387	0.3507	0.3507	0.3507	0.3277
CUS	0.3812	0.3660	0.3637	0.3455	0.3456	0.3515	0.3330	0.3455	0.3456	0.3456	0.3515	0.3515	0.3515	0.3330
ANC	0.3854	0.3702	0.3743	0.3548	0.3504	0.3527	0.3418	0.3548	0.3504	0.3504	0.3527	0.3527	0.3527	0.3418
PUN	0.3882	0.3772	0.3759	0.3610	0.3591	0.3544	0.3454	0.3610	0.3591	0.3591	0.3544	0.3544	0.3544	0.3454
SMA	0.3909	0.4012	0.3775	0.3664	0.3718	0.3656	0.3477	0.3664	0.3718	0.3718	0.3656	0.3656	0.3656	0.3477
HUA	0.3998	0.4085	0.3881	0.3746	0.3742	0.3703	0.3635	0.3746	0.3742	0.3742	0.3703	0.3703	0.3703	0.3635
MOQ	0.4023	0.4104	0.4030	0.3871	0.3764	0.3726	0.3649	0.3871	0.3764	0.3764	0.3726	0.3726	0.3726	0.3649
HCV	0.4054	0.4123	0.4190	0.3876	0.3830	0.3726	0.3759	0.3876	0.3830	0.3830	0.3726	0.3726	0.3726	0.3759
APU	0.4273	0.4137	0.4225	0.3906	0.3836	0.3771	0.3776	0.3906	0.3836	0.3836	0.3771	0.3771	0.3771	0.3776
CAJ	0.4321	0.4273	0.4250	0.4062	0.3983	0.3807	0.3799	0.4062	0.3983	0.3983	0.3807	0.3807	0.3807	0.3799
AYA	0.4584	0.4295	0.4381	0.4324	0.4024	0.3807	0.3889	0.4324	0.4024	0.4024	0.3807	0.3807	0.3807	0.3889

