



APLICACIÓN DE RAÍCES CRUZADAS POLINOMIALES AL INTERCAMBIO DE ENERGÍA RADIANTE ENTRE DOS GEOMETRÍAS TRIANGULARES

POLYNOMIAL CROSS-ROOTS APPLICATION FOR THE EXCHANGE OF RADIANT ENERGY BETWEEN TWO TRIANGULAR GEOMETRIES

Yanan Camaraza-Medina^{1,*}

Recibido: 12-02-2023, Recibido tras revisión: 21-04-2023, Aceptado: 26-04-2023, Publicado: 01-07-2023

Resumen

El factor de visión entre superficies es esencial en la transferencia de calor por radiación. En la actualidad, para evaluar los factores de visión entre geometrías triangulares con bordes comunes y ángulo θ no se dispone de soluciones analíticas, debido a la elevada complejidad matemática asociada a su desarrollo. Para estas configuraciones, la literatura solo tiene las soluciones gráficas de Sauer, cuyo uso genera errores medios del 12 %. En este trabajo se desarrolla un método aproximado que no genere una alta complejidad matemática y que garantice un ajuste inferior al 12 %. Para este propósito fueron estudiadas 32 configuraciones geométricas diferentes (8 básicas y 24 derivadas), siendo obtenidas las soluciones para cada uno de los casos evaluados. Para la validación de los modelos obtenidos se usaron 42 dimensiones diferentes de emisor y receptor, siendo computados en cada caso los factores de visión mediante la solución analítica (SA), la solución numérica obtenida con la regla múltiple de Simpson 1/3 (RMS) con cinco intervalos y mediante la raíz cruzada de Bretzhtsov (RCB), comparándose finalmente los resultados obtenidos en cada uno los ocho casos básicos. En todos los casos evaluados, la RCB mostró los mejores ajustes, con un error de ± 6 % en más del 90 % de las muestras, mientras que la RMS mostró una dispersión media de ± 6 % en el 65 % de los datos. La naturaleza práctica de la contribución y los valores razonables de ajuste obtenidos, establecen a la propuesta como una herramienta adecuada para su uso en la ingeniería térmica.

Palabras clave: superficies triangulares, raíz cruzada de Bretzhtsov, factor de visión

Abstract

The view factor between surfaces is essential in radiative heat transfer. Currently, there are no analytical solutions to evaluate the view factors between triangular geometries with common edges and angle θ due to the high mathematical complexity associated with their development. For these configurations, the literature only has Sauer's graphical solutions, which generate average errors of 12%. This study developed an approximate method that does not involve high mathematical complexity and guarantees a fit of less than 12%. For this purpose, 32 different geometric configurations were studied (8 basic and 24 derived), obtaining the solutions for each evaluated case. 42 different transmitter and receiver dimensions were used to validate the models obtained. The vision factors were computed in each case using the analytical solution (AS), the numerical solution obtained with Simpson's 1/3 multiple rules (SMR) with five intervals, and Bretzhtsov's cross-root (BCR). The results obtained in each of the eight base cases were compared. In all cases evaluated, the BCR showed the best fits with an error of $\pm 6\%$ in more than 90% of the samples, while the SMR showed an average scatter of $\pm 6\%$ in 65% of the data. The practical nature of the contribution and the reasonable fitting values obtained show that this proposal is a suitable tool for thermal engineering.

Keywords: triangular surfaces, Bretzhtsov cross-root, view factor

^{1,*}Technical Sciences Faculty, University of Matanzas, Cuba. Autor para correspondencia ✉: yanan.camaraza@umcc.cu.

Forma sugerida de citación: Camaraza-Medina, Y. "Aplicación de raíces cruzadas polinomiales al intercambio de energía radiante entre dos geometrías triangulares," *Ingenius, Revista de Ciencia y Tecnología*, N.º 30, pp. 29-41, 2023. DOI: <https://doi.org/10.17163/ings.n30.2023.03>.

1. Introducción

En la ingeniería térmica es requerido evaluar la radiación térmica entre superficies. El factor de visión es quien establece que fracción de la energía radiante emitida por una superficie es interceptada por otra [1].

La relación geométrica entre dos superficies y su influencia sobre el factor de visión ha sido objeto de estudio durante décadas, siendo obtenidas soluciones numéricas y analíticas para disímiles configuraciones geométricas [2–5]. Una compilación extensa de factores de visión, con más de 320 configuraciones diferentes, fue dada por Howell [6].

El salto acelerado del uso de las técnicas computacionales ha generalizado el uso de programas comerciales basados sobre el método de elementos finitos (MEF) en la solución de problemas de radiación térmica [7–10].

Los problemas tridimensionales de bordes se reducen a superficies con bordes comunes y ángulo θ incluido. Sin embargo, para este tipo de geometrías el uso del álgebra de factores de forma es muy tedioso, siendo preferidas las soluciones numéricas, entre ellas el MEF [11–13].

En el MEF, los mallados generalmente utilizan elementos triangulares y raramente usan rectángulos o cuadrados, a menos que la geometría global sea un cubo perfecto. La determinación de una solución analítica para el factor de visión entre geometrías triangulares requiere de sumas de integrales múltiples, debido al cambio de los contornos de integración. Las soluciones en muchos casos no son funciones elementales, siendo requerido manipular funciones trigonométricas inversas, polilogaritmos y sumas de series infinitas [14].

Esto propicia que la integración directa sea una tarea extremadamente engorrosa para geometrías no compartidas o sin bordes comunes, lo cual hace preferir la integración numérica. Por este motivo, se carece de soluciones analíticas para este tipo de geometrías [15].

Mediante RMS con cinco intervalos, fueron graficados los factores de visión para varias geometrías triangulares perpendiculares y con borde común [16]. Sin embargo, su interpretación gráfica genera errores medios del 12 %, además de no ser aplicables al MEF, pues no pueden ser discretizados. Actualmente, en la literatura técnica especializada, para obtener los factores de visión entre geometrías triangulares solo se dispone de esta solución gráfica [6–13].

El método de RCB brinda un ajuste razonable durante la aproximación de funciones complejas, por tal motivo puede ser utilizado para generar las expresiones requeridas en la discretización del MEF. El método RCB es similar al MEF, pues su concepción matemática se basa en la formación de nodos, obteniéndose los ajustes con polinomios a partir de la interconexión de los nodos [17]. A partir de lo anteriormente planteado, se muestra que en la actualidad se carece

de soluciones analíticas (exactas o aproximadas) para la estimación de los factores de visión entre las geometrías triangulares con bordes comunes y ángulo θ incluido.

Por tanto, el objetivo principal de este trabajo es desarrollar soluciones aproximadas para el cálculo de los factores de visión entre geometrías triangulares con bordes comunes y ángulo θ incluido, que no muestren una alta complejidad matemática y garanticen un ajuste adecuado respecto a la SA. Así es posible establecer un nuevo método de análisis, para su uso en el MEF.

En esta investigación, se desarrollan las soluciones analíticas exactas para ocho geometrías triangulares básicas y sus respectivas RCB. Para establecer comparaciones se calcularon 42 ejemplos con varias relaciones de aspecto para cada geometría, usando la SA, la RCB y la RMS.

Dado el carácter práctico de la contribución y los valores razonables de los ajustes obtenidos, la propuesta es una herramienta adecuada para su aplicación a la ingeniería térmica y prácticas afines que requieren cálculos de radiación térmica entre geometrías triangulares.

2. Materiales y métodos

2.1. Definición del factor de visión

El factor de visión F_{12} depende de la posición y configuración geométrica de las superficies emisora A_1 y receptora A_2 , pudiendo ser definido como la fracción de la radiación que abandona la primera y que es interceptada por la segunda, lo cual es expresado como [18], en la ecuación (1)

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos O_1 \cos O_2}{r^2} dA_2 dA_1 \quad (1)$$

Donde: O_1, O_2 – ángulos entre el vector normal a las áreas dA_1 y dA_2 y la línea que conecta el centro de las superficies A_1 y A_2 , respectivamente. r –distancia entre los centros de las superficies A_1 y A_2 (véase la Figura 1).

La ecuación (1) requiere una doble integración sobre las superficies, lo cual resulta ser muy laborioso, pues se debe manipular un grupo elevado de integrales inmediatas y su posterior factorización.

El análisis puede ser simplificado mediante aproximaciones numéricas, pues con un grupo razonable de intervalos, puede ser obtenido un ajuste adecuado. Para configuraciones tridimensionales (3–D), en la actualidad se disponen de varios métodos de solución, entre ellos la integración de contorno [19–24].

En este trabajo, será utilizada la integración de contorno para obtener del factor de visión de las ocho geometrías analizadas. Para aproximar las funciones

especiales generadas en la integración, será utilizado el método RCB.

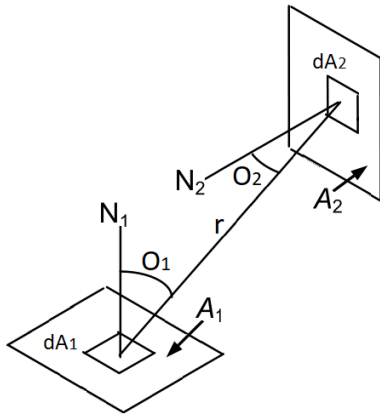


Figura 1. Geometría básica del factor de visión

$$f_{(1)} = F_{a-b} = \frac{\sin^2 \theta}{\pi A_1} \int_0^L dy_1 \int_0^D dx \int_0^W dz \int_0^D \frac{xz}{\{(y_1 - y_2)^2 + x^2 + z^2 - 2xzc \cos \theta\}^2} dy_2 \quad (2)$$

Para evaluar la ecuación (2) son utilizadas las siguientes sustituciones (ecuación (3)).

$$X = W/D; Y = L/D; R = \sqrt{X^2 + Y^2 - 2XY \cos \theta} \quad (3)$$

$$f_{(1)} = \frac{1}{\pi Y} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\sin 2\theta}{4} \left\{ Y^2 \tan^{-1} \left(\frac{X}{Y} \csc \theta - \cot \theta \right) + X^2 \tan^{-1} \left(\frac{Y}{X} \csc \theta - \cot \theta \right) + XY \sin \theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) (X^2 + Y^2) \right\} + \\ & + \frac{1}{4} \ln \left\{ \left\{ \frac{X^2}{R^2} \left(\frac{1+X^2}{1+R^2} \right)^{\cos 2\theta} \right\}^{X^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{Y^2 + Y^2 R^2}{R^2 + Y^2 R^2} \right)^{Y^2 \sin^2 2\theta} \left(\frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+R^2} \right)^{\cos^2 \theta + 1} \right\} + \\ & + (\sin^3 \theta \cos \theta) \tan^{-1} \left(\frac{Y \sin \theta \sqrt{X^2 + \cot^2 \theta + 1}}{X^2 - Y X \cos \theta + 1} \right) \sqrt{X^4 + X^2 (\cot^2 \theta + 1)} + X \tan^{-1} \left(\frac{1}{X} \right) + \\ & + Y \tan^{-1} \left(\frac{1}{Y} \right) - R \cot^{-1}(R) + \frac{\sin 2\theta}{2} \int_0^Y \sqrt{Z^2 + \cot^2 \theta + 1} \tan^{-1} \left(\frac{X \sin \theta \sqrt{z^2 + \cot^2 \theta + 1}}{z^2 - z X \cos \theta} + 1 \right) dz \end{aligned} \right. \quad (4)$$

En las ecuaciones (2), (3) y (4), el ángulo θ es dado en radianes. La ecuación (4) es muy compleja, por esta razón, la última integral no fue resuelta, dado que su solución puede ser obtenida numéricamente usando la regla de Simpson 1/3 (con ocho intervalos como mínimo).

En la Figura 3, mediante el trazado de líneas diagonales, la superficie emisora A_1 y receptora A_2 son divididas en ocho geometrías triangulares. Aplicando el álgebra de forma para la geometría generada en la Figura 3, son obtenidas $\frac{1}{2}n^{n-1} = \frac{1}{2}4^{4-1} = 32$ combinaciones de factores de visión. La geometría analizada es simétrica, por tanto, es posible definir siete casos básicos (véase la Figura 4), los cuales serán:

Caso 1: Triángulo rectángulo a rectángulo, con lado común y ángulo θ entre ambas superficies.

Caso 2: Triángulo rectángulo a triángulo rectángulo, con lado común y ángulo θ entre ambas superficies: vértices en un punto común.

2.2. Generado de mallas para elementos de superficies

En la ingeniería moderna, en la generación de mallas unos de los elementos más utilizados son los triangulares. Contrariamente, los rectangulares o cuadrados son utilizados en muy pocas ocasiones, exceptuando los casos que la geometría global sea un cubo perfecto. La formulación de este tipo de geometrías requiere un tratamiento matemático complejo que incluye sumas de la cuádruple integral ecuación (1), causado por la variación de los límites en la proyección sobre cada eje coordenado. El factor de visión entre dos superficies rectangulares del mismo ancho, con borde común y ángulo θ incluido (véase la Figura 2), viene dado por la ecuación (2).

Después de evaluar la ecuación (2) se obtiene la siguiente solución $f_{(1)}$ (ecuación (4)).

Caso 3: Triángulo rectángulo a triángulo rectángulo, con lado común y ángulo θ entre ambas superficies: vértices en extremos opuestos.

Caso 4: Triángulo isósceles a rectángulo, con lado común y ángulo θ entre ambas superficies.

Caso 5: Triángulo rectángulo a triángulo rectángulo de distinto tamaño, con ángulo θ entre ambas superficies: vértices en un punto común.

Caso 6: Triángulo rectángulo a triángulo rectángulo de distinto tamaño, con ángulo θ entre ambas superficies: vértices en extremos opuestos.

Caso 7: Triángulos rectángulos perpendiculares con un borde igual y dispuestos en dirección opuesta.

Los factores de visión para los restantes casos pueden ser obtenidos mediante la regla de sumas.

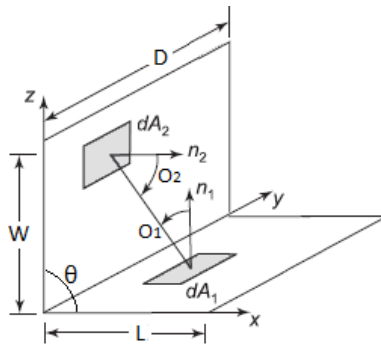


Figura 2. Rectángulos de igual ancho, con borde común y ángulo θ incluido

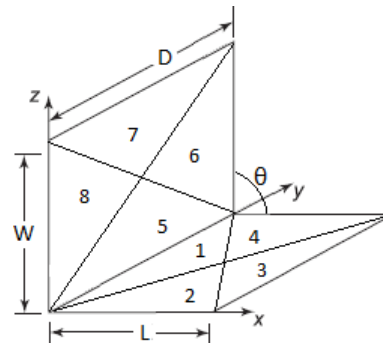


Figura 3. División de superficies rectangulares en elementos triangulares

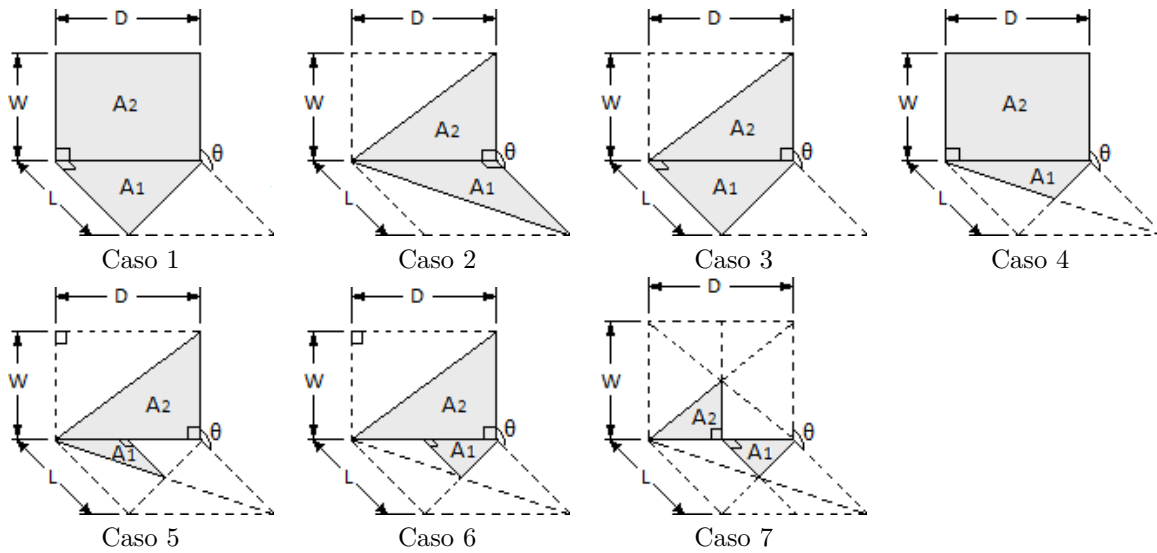


Figura 4. Configuraciones básicas para geometrías triangulares

2.3. Modelación del factor de visión. Caso 1

En el caso 1 (véase la Figura 5), se cumple la ecuación (5).

$$\cos O_1 = \frac{z \sin \theta}{r}; \cos O_2 = \frac{x \sin \theta}{r} \quad (5)$$

$$r = (y_1 - y_2)^2 + x^2 + z^2 - 2xz \cos \theta$$

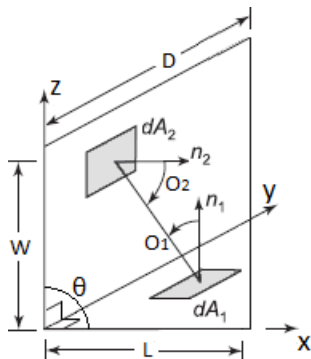


Figura 5. Geometría básica para el caso 1

Sustituyendo la ecuación (5) en la ecuación (1), el factor de visión F_{12} viene dado por la ecuación (6).

$$f_2 = \frac{\sin^2 \theta}{\pi A_1} \int_0^L dy_1 \int_0^{y_1 D/L} dx \int_0^D dz \cdot \int_0^W \frac{xz}{\{(y_1 - y_2)^2 + x^2 + z^2 - 2xz \cos \theta\}^2} dy_2 \quad (6)$$

Para ejecutar la integración, en la ecuación (6) fue realizado el cambio indicado en la ecuación (7).

$$W = a; D = b; L = c \quad (7)$$

La ecuación (6) es integrada primero sobre la superficie emisora A_1 , obteniéndose una suma de integrales, la cual viene dada por la ecuación (8).

$$f_2 = \frac{1}{\pi A_1} \int_0^b dy \int_0^c \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{1}{z} \right) + \frac{z \sin^2 \theta}{2} \ln \left[\frac{z^2(z^2 - 2az \cos \theta + 1 + a^2)}{(1+z^2)(a^2+z^2-2az \cos \theta)} \right] - z \sin \theta \cos \theta \left[\frac{\pi}{2} - \theta + \tan^{-1} \left(\frac{a - z \cos \theta}{z \sin \theta} \right) \right] + \cos \theta \sqrt{1 + z^2 \sin^2 \theta} \left[\tan^{-1} \left(\frac{a - z \cos \theta}{\sqrt{1 + z^2 \sin^2 \theta}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{z \cos \theta}{\sqrt{1 + z^2 \sin^2 \theta}} \right) + \frac{a \cos \theta - z}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \theta}} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \theta}} \right) \right] \right\} dz \quad (8)$$

Después de un complejo proceso, en el que fue requerido resolver $n^n = 4^4 = 256$ funciones primitivas, es resuelta la suma de integrales dobles dada en la ecuación (8), cuya solución es proporcionada en la ecuación (9):

$$f_{(2)} = 2f_{(1)} \left\{ \frac{a^2 b^2}{8(a^2+b^2)^2} \ln \left(\frac{b^2+c^2}{(a^2+c^2)^2} \right) + \frac{a^2 b^4}{4(a^2+b^2)^2} \ln \left(\frac{b(a^2+c^2)}{b^2(a^2+c^2)} \right) + \frac{a^4 b^2}{4(a^2+b^2)^2} \ln \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{a^2 c^2}{8(a^2+b^2)^2} \ln \left(\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)}{c^2(a^2+c^2)} \right) + \frac{a^2}{8} \ln \left(\frac{a^4(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2)^2(a^2+c^2)} \right) + \frac{b^2}{8} \ln \left(\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{b^2(a^2+b^2+c^2)} \right) + \frac{c^2}{8} \ln \left(\frac{c^2(a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} \right) + \frac{3}{4} ab \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{1}{2} bc \tan^{-1} \left(\frac{c}{b} \right) - \frac{1}{2} b \sqrt{a^2 + c^2} \tan^{-1} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right) - \frac{a^4}{8(a^2+b^2)^2} \ln(a^2 + c^2) + \frac{ab^2(2a - \pi b)}{8(a^2+b^2)^2} + \frac{a^2 b^2 \left(\frac{b^4}{a^2+b^2} - b^2 - c^2 \right)}{2(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{b^2+c^2 - \frac{b^4}{a^2+b^2}}} \tan^{-1} \left(\frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{b^2+c^2 - \frac{b^4}{a^2+b^2}}}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}} (b^2+c^2 - \frac{b^4}{a^2+b^2} - b^2 \{ (a^2+b^2) - b^2 \})} \right) - \frac{1}{2} \int_0^a \left[\frac{bx^2}{a\sqrt{x^2+c}} \tan^{-1} \left(\frac{a\sqrt{x^2+c}}{x^2+c^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2-ax)} \right) + \frac{bx}{\sqrt{x^2+c}} \tan^{-1} \left(\frac{\frac{b}{a}x-b}{\sqrt{x^2+c}} \right) \right] dx \right\} \quad (9)$$

En la ecuación (9), el término $f_{(1)}$ es obtenido mediante la ecuación (4). Dada la complejidad de la ecuación (9), la última integral no es resuelta, obteniéndose su solución de forma numérica mediante la RMS (se recomiendan doce intervalos). La ecuación (9) es transformada a la ecuación (10).

$$F_{12} = f_{(n)} = 2F_{(1)} \cdot \varphi_n \quad (10)$$

La ecuación (10) es posteriormente transformada, dividiendo cada variable dimensional por la longitud

del borde común b , quedando de la forma de la ecuación (11).

$$\begin{aligned} 1 &= b/b; X = a/b; Y = c/b \\ R &= \sqrt{X^2 + Y^2 - 2XY \cos \theta} \end{aligned} \quad (11)$$

Aplicando en la ecuación (9) el cambio de variables declarado en la ecuación (11), es obtenida la solución analítica para el caso 1, la cual viene dada por la ecuación (12).

$$f_{(2)} = 2f_{(1)} \left\{ \frac{X^2}{8(X^2+1)^2} \ln \left(\frac{Y^2+1}{R^4} \right) + \frac{X^2}{4(X^2+1)^2} \ln \left(\frac{R^2}{X(Y^2+1)} \right) + \frac{X^2 Y^2}{8(X^2+1)^2} \ln \left(\frac{(Y^2+1)(R^2+1)}{Y^2 R^2} \right) + \frac{X^4}{4(X^2+1)^2} \ln \left(\frac{1}{X} \right) - \frac{X^4}{8(X^2+1)^2} \ln \left(R^2 \right) + \frac{3X}{4} \tan^{-1} \left(\frac{1}{X} \right) + \frac{Y}{2} \tan^{-1} \left(\frac{1}{Y} \right) - \frac{R}{2} \tan^{-1} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{1}{8} \ln \left\{ \left(\frac{X^4(R^2+1)^2}{R^2(X^2+1)^2} \right)^{X^2} \left(\frac{Y^2(R^2+1)}{R^2(X^2+1)} \right)^{Y^2} \left(\frac{R^2(X^2+1)}{R^2+1} \right) \right\} + \frac{2X^2 - \pi}{8(X^2+1)^2} - \frac{X^2 \left(Y^2 - \frac{X^2+2}{X^2+1} \right)}{2(X^2+1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{Y^2 - \frac{X^2+2}{X^2+1}}} \tan^{-1} \left(\frac{(X^2+1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{Y^2 - \frac{X^2+2}{X^2+1}}}{(X^2+1) \left(Y^2 - \frac{X^2+2}{X^2+1} - X^2 \right)} \right) \right\} \quad (12)$$

La ecuación (12) es una combinación de variables $(Y; X)$ y su evaluación es una tarea compleja, al ser requeridos resolver polilogaritmos, sumas de series infinitas y funciones trigonométricas inversas. Sin embargo, mediante el método de raíces cruzadas de Bretzhtsov es posible obtener un resultado aproximado, lo cual simplificaría el cálculo del factor de visión.

Para implementar el método de raíces cruzadas, son construidos los nodos usando valores prefijados $(Y; X)$, los cuales son unidos por medio de líneas diagonales

formando las familias de curvas a_n y b_n . En este trabajo son usados los valores $Y = (0.1; 0.2; 0.5; 1; 3; 10)$ y $X = (0.1; 0.3; 0.6; 1; 3; 6; 10)$.

En las Tablas 1 y 2 son resumidos la combinación de variables $(Y; X)$ para cada nodo y los nodos que integran cada curva a_n y b_n , respectivamente, mientras en la Figura 6 son graficadas las familias de curvas a_n y b_n .

El siguiente paso es computar el factor de visión mediante la ecuación (12) para cada una de las com-

binaciones de variables ($Y; X$) dadas en la Tabla 1, graficándolos en un diagrama $F_{12}; X$, (véase la Figura 7). La unión de los nodos a lo largo del eje x permite crear una tercera familia de curvas c_n . Una particularidad es que todos los nodos integrantes de una misma curva c_n le corresponden el mismo valor de la variable Y (véase la Tabla 1). En la Tabla 3 son resumidos los nodos que integran cada curva c_n .

Tabla 1. Combinaciones variables ($Y; X$) para cada nodo

nodo	(Y, X)	nodo	(Y, X)	nodo	(Y, X)	nodo	(Y, X)
1	3 ; 0.1	12	1 ; 0.6	23	0.5 ; 1	34	0.5 ; 6
2	10 ; 0.3	13	3 ; 1	24	1 ; 3	35	1 ; 10
3	1 ; 0.1	14	10 ; 3	25	3 ; 6	36	0.1 ; 3
4	3 ; 0.3	15	0.1 ; 0.1	26	10 ; 10	37	0.2 ; 6
5	10 ; 0.6	16	0.2 ; 0.3	27	0.1 ; 0.6	38	0.5 ; 10
6	0.5 ; 0.1	17	0.5 ; 0.6	28	0.2 ; 1	39	0.1 ; 6
7	1 ; 0.3	18	1 ; 1	29	0.5 ; 3	40	0.2 ; 10
8	3 ; 0.6	19	3 ; 3	30	1 ; 6	41	10 ; 0.1
9	10 ; 1	20	10 ; 6	31	3 ; 10	42	0.1 ; 10
10	0.2 ; 0.1	21	0.1 ; 0.3	32	0.1 ; 1		
11	0.5 ; 0.3	22	0.2 ; 0.6	33	0.2 ; 3		

Tabla 2. Nodos que integran cada curva a_n y b_n

a_n	nodos	b_n	nodos
a_1	1-2	b_1	10-21
a_2	3-4-5	b_2	6-16-27
a_3	6-7-8-9	b_3	3-11-22-32
a_4	10-11-12-13-14	b_4	1-7-17-28-36
a_5	15-16-17-18-19-20	b_5	41-4-12-23-33-39
a_6	21-22-23-24-25-26	b_6	2-8-18-29-37-42
a_7	27-28-29-30-31	b_7	5-13-24-34-40
a_8	32-33-34-35	b_8	9-19-30-38
a_9	36-37-38	b_9	14-25-35
a_{10}	39-40	b_{10}	20-31

Tabla 3. Nodos que integran cada curva c_n

c_n	nodos	c_n	nodos
c_1	15-21-27-32-36-39-42	c_4	3-7-12-18-24-30-35
c_2	10-16-22-28-33-37-40	c_5	1-4-8-13-19-25-31
c_3	6-11-17-23-29-34-38	c_6	41-2-5-6-14-20-26

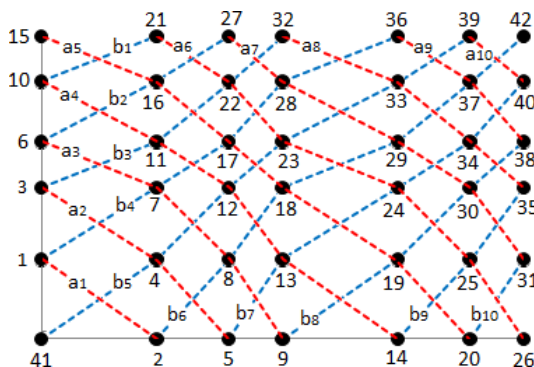


Figura 6. Familias de curvas a_n y b_n

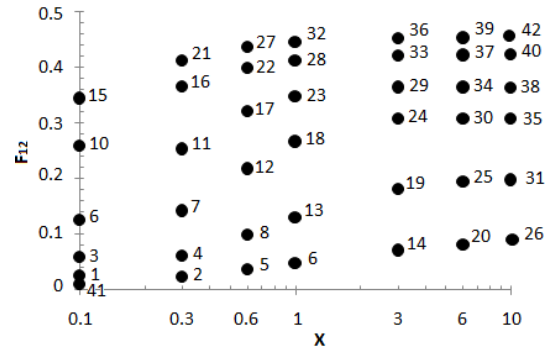


Figura 7. Esquema para aplicar las raíces cruzadas

Cada curva de las familias a_n, b_n, c_n es aproximada de forma individual mediante el método de mínimos cuadrados (MC), usando un polinomio de tercer grado en la forma $mX^3 + nX^2 + oX + p$, estableciendo así una dependencia entre el factor de visión F_{12} y la variable X . En la Figura 8 es dada la aplicación del método para las curvas a_5, b_5, c_4 .

En la Tabla 4 son resumidos los valores de las constantes m, n, o, p obtenidos en la implementación de MC a la totalidad de las curvas a_n, b_n, c_n . En cada curva, los valores $m, n, +o, p$ son promediados, obteniéndose de esta forma las funciones aproximadas A_n, B_n, C_n .

Para cada curva, el ángulo aparente de transmisibilidad (véase la Figura 8) es dado por la ecuación (13)

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{X}{Y} \right) \tag{13}$$

Por tanto, la raíz cruzada de Bretzhtsov es dada por la ecuación (14).

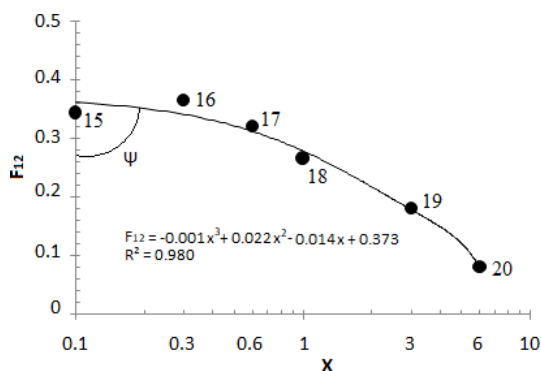
$$\varphi_n = A_n \psi^2 + B_n \psi + C_n \tag{14}$$

Las constantes m, n, o, p para los polinomios A_n, B_n, C_n son resumidos en la Tabla 4. Inicialmente para las aproximaciones fueron utilizadas las variables X , manteniendo constantes las variables Y por tanto, para aplicar las raíces cruzadas, se alternan las variables Y por X , obteniéndose las ecuaciones (15), (16) y (17) para los polinomios A_n, B_n, C_n .

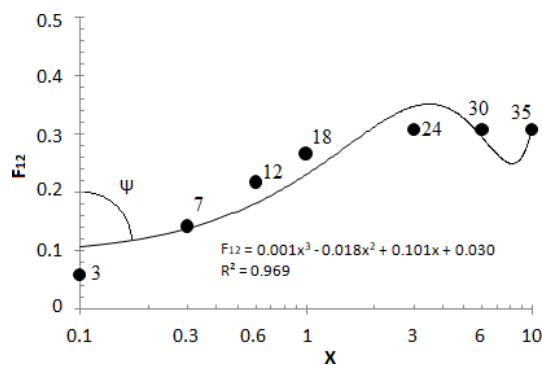
$$A_n = -0.022Y^3 + 0.316Y^2 - 0.89Y + 0.5 \tag{15}$$

$$B_n = 0.056Y^3 - 0.783Y^2 + 2.23Y - 1.43 \tag{16}$$

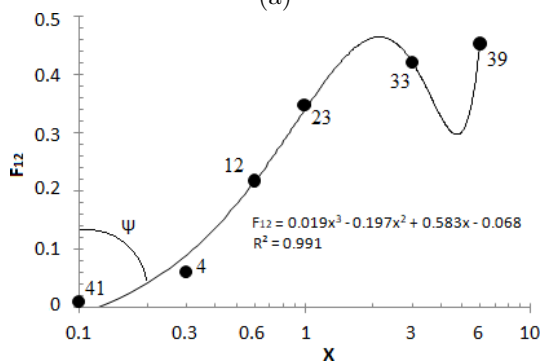
$$C_n = 0.03Y^3 + 0.407Y^2 - 1.07Y + 2.02 \tag{17}$$



(a)



(c)



(b)

Figura 8. Aproximación mediante mínimos cuadrados: (a) curva a_5 , (b) curva b_5 , (c) curva c_4

Sustituyendo las ecuaciones (15), (16) y (17) en la ecuación (14), se obtiene que la raíz cruzada de Bretzhtsov para el caso 1 viene dada por la ecuación (18).

$$\varphi_n = (-0.022Y^3 + 0.316Y^2 - 0.89Y + 0.5) \psi^2 + (0.056Y^3 - 0.783Y^2 + 2.23Y - 1.43) \psi - 0.03Y^3 + 0.407Y^2 - 1.07Y + 2.02 \quad (18)$$

Tabla 4. Constantes m , n , o , p obtenidas con el uso de MC

Curva	m	n	o	p
a_2	0	0.186	-1.023	0.51
a_3	0.549	0.32	-0.528	0.91
a_4	-0.278	0.28	-0.88	0.352
a_5	-0.337	0.52	-0.514	0.373
a_6	-0.11	0.64	-2.48	0.484
a_7	0	0.66	-0.95	0.456
a_8	0	-0.03	-0.713	0.447
a_9	0	-0.05	-0.03	0.468
promedio A_n	-0.022	0.316	-0.89	0.5
Curva	m	n	o	p
b_1	0	0	3.06	-1.181
b_2	0	-1.96	2.97	-1.53
b_3	0	-1.18	2.34	-1.44
b_4	0.424	-0.592	1.98	-1.67
b_5	0.019	-0.197	2.583	-1.068

b_6	0.106	-1.91	3.22	-2.99
b_7	0.011	-0.75	2.37	-1.07
b_8	0	-0.93	2.29	-1.123
b_9	0	-0.31	1.19	-1.285
b_{10}	0	0	0.29	-0.94
promedio B_n	0.056	-0.783	2.23	-1.43
Curva	m	n	o	p
c_1	0	0.16	-1.69	2.374
c_2	0.018	0.28	-1.103	2.307
c_3	0.02	0.34	-1.161	2.183
c_4	0.002	-0.035	-1.173	2.088
c_5	0.14	0.99	-0.92	2.16
c_6	0	0.71	-0.37	1.01
promedio C_n	0.03	0.407	-1.07	2.02

Sustituyendo la ecuación (18) en la (10) es obtenido el factor de visión para el caso 1, el cual viene dado por la ecuación (19).

$$f_{(2)} = 2f_{(1)} \cdot \{ (-0.022Y^3 + 0.316Y^2 - 0.89Y + 0.5) \psi^2 + (0.056Y^3 - 0.783Y^2 + 2.23Y - 1.43) \psi - 0.03Y^3 + 0.407Y^2 - 1.07Y + 2.02 \} \quad (19)$$

3. Resultados y discusión

Para el uso en la ingeniería práctica, la ecuación (19) es mucho más simple que la solución analítica (SA) dada con anterioridad en la ecuación (12). El porcentaje de desviación (error) es computado con respecto a la solución analítica y es obtenido mediante la ecuación (20) [25].

$$D_{\%} = 100 \cdot \frac{SA - Val}{SA} \quad (20)$$

Donde: $D_{\%}$ es el porcentaje de desviación, en %. SA es el factor de visión obtenido con la solución analítica. Val es el factor de visión obtenido mediante métodos aproximados.

Para calcular los valores de $D_{\%}$, son computados los factores de visión para todas las 42 combinaciones de variables ($Y; X$) dadas en la Tabla 1, utilizando la SA , la RMS con cinco intervalos y los factores de visión obtenidos con la RCB.

En la Figura 9 son graficados los valores $D_{\%}$ obtenidos con la ecuación (18) para los factores de visión calculados mediante RMS y RCB, ajustados en bandas de error de $\pm 3\%$ y $\pm 6\%$.

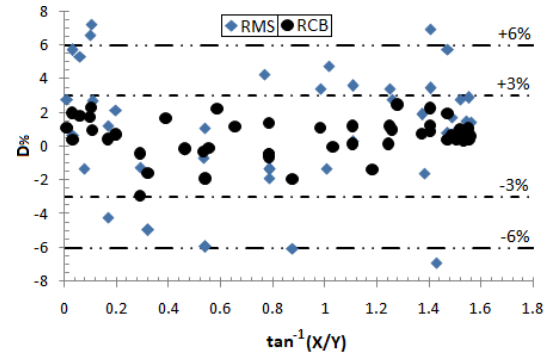


Figura 9. $D_{\%}$ obtenidos de la ecuación (18) para el caso 1

Para el caso 1, la Figura 9 muestra que las RCB proporcionan un mejor ajuste con respecto a la SA , con un error medio de $\pm 3\%$ en el 100 % de los puntos ($Y; X$) analizados. Contrariamente, los factores de visión obtenidos con RMS, brindan un menor ajuste con respecto a la SA , con errores medios de $\pm 3\%$ y $\pm 6\%$ para el 54,8 % y 85,7 % de los puntos ($Y; X$) evaluados, respectivamente.

3.1. Modelación y validación de los casos 2 al 7

Para los casos 2 al 7 (véase la Figura 4), matemáticamente el factor de visión F_{12} viene dado por las ecuaciones (21) a la (26).

$$\text{Caso 2} \quad f_{(3)} = \frac{\sin^2 \theta}{\pi A_1} \int_0^L dy_1 \int_0^{y_1 D/L} dx \int_0^W dy_2 \int_0^{y_2 D/L} \frac{xz}{\{(y_1 - y_2)^2 + x^2 + z^2 - 2xz \cos \theta\}^2} dz \quad (21)$$

$$\text{Caso 3} \quad f_{(4)} = \frac{\sin^2 \theta}{\pi A_1} \int_0^L dy_1 \int_0^{y_1 D/L} dx \int_0^W dy_2 \int_0^{y_2 D/L} \frac{xz}{\{(y_1 - y_2)^2 + x^2 + z^2 - 2xz \cos \theta\}^2} dz \quad (22)$$

$$\text{Caso 4} \quad f_{(5)} = \frac{\sin^2 \theta}{\pi A_1} \int_0^{L/2} dy_1 \int_0^{y_1 D/L} dx \int_0^W dz \int_0^{y_2 D/L} \frac{xz}{\{(y_1 - y_2)^2 + x^2 + z^2 - 2xz \cos \theta\}^2} dy_2 \quad (23)$$

$$\text{Caso 5} \quad f_{(6)} = \frac{\sin^2 \theta}{\pi A_1} \int_0^{L/2} dy_1 \int_0^{y_1 D/L} dx \int_0^W dy_2 \int_0^{y_2 D/L} \frac{xz}{\{(y_1 - y_2)^2 + x^2 + z^2 - 2xz \cos \theta\}^2} dz \quad (24)$$

$$\text{Caso 6} \quad f_{(7)} = \frac{\sin^2 \theta}{\pi A_1} \int_0^{L/2} dy_1 \int_{y_1 D/L}^0 dx \int_0^W dy_2 \int_0^{y_2 D/L} \frac{xz}{\{(y_1 - y_2)^2 + x^2 + z^2 - 2xz \cos \theta\}^2} dz \quad (25)$$

$$\text{Caso 7} \quad f_{(8)} = \frac{\sin^2 \theta}{\pi A_1} \int_0^{L/2} dy_1 \int_{-y_1 D/L}^0 dx \int_0^{W/2} dy_2 \int_0^{y_2 D/L} \frac{xz}{\{(y_1 - y_2)^2 + x^2 + z^2 - 2xz \cos \theta\}^2} dz \quad (26)$$

Las soluciones analíticas de las ecuaciones (21) a la (26) son extremadamente extensas y complejas, al ser requerido el manejo de funciones de Spence, función gamma, sumas de polilogaritmos, funciones de Bessel modificadas de primera especie y órdenes cero, uno y dos, por esta razón, no serán presentadas acá.

Para la solución de las ecuaciones (21) a (26) se aplica el mismo procedimiento usado en el caso 1, obteniéndose para los casos 2 al 7 las siguientes aproximaciones para calcular el factor de visión.

$$\text{Caso 2} \quad f_{(3)} = 2f_{(1)} \cdot \{(-0.001Y^3 + 0.033Y^2 - 0.14Y + 0.265)\psi^2 + (0.011Y^3 - 0.177Y^2 + 0.7Y - 0.615)\psi - 0.01Y^3 + 0.142Y^2 - 0.475Y + 1.29\} \quad (27)$$

$$\text{Caso 3 } f_{(4)} = 2f_{(1)} \cdot \{(-0.031Y^3 + 0.424Y^2 - 1.257Y + 1.1)\psi^2 + (0.071Y^3 - 0.975Y^2 + 2.92Y - 2.06)\psi - 0.034Y^3 + 0.462Y^2 - 1.268Y + 1.6\} \quad (28)$$

$$\text{Caso 4 } f_{(5)} = 2f_{(1)} \cdot \{(-0.01Y^2 + 0.24Y + 0.67)\psi^2 + (0.02Y^2 - 0.31Y - 2.2)\psi - 0.02Y^2 + 0.27Y + 3\} \quad (29)$$

$$\text{Caso 5 } f_{(6)} = 2f_{(1)} \cdot \{(-0.02Y^3 + 0.29Y^2 - 1.1Y + 0.6)\psi^2 + (0.06Y^3 - 0.88Y^2 + 2.96Y - 4.41)\psi - 0.04Y^3 + 0.55Y^2 - 1.41Y + 1.87\} \quad (30)$$

$$\text{Caso 6 } f_{(7)} = 2f_{(1)} \cdot \{(-0.011Y^3 + 0.12Y^2 - 0.025Y + 0.52)\psi^2 + (0.025Y^3 - 0.307Y^2 + 0.49Y - 1.64)\psi - 0.134Y^3 + 0.183Y^2 - 0.35Y + 2.47\} \quad (31)$$

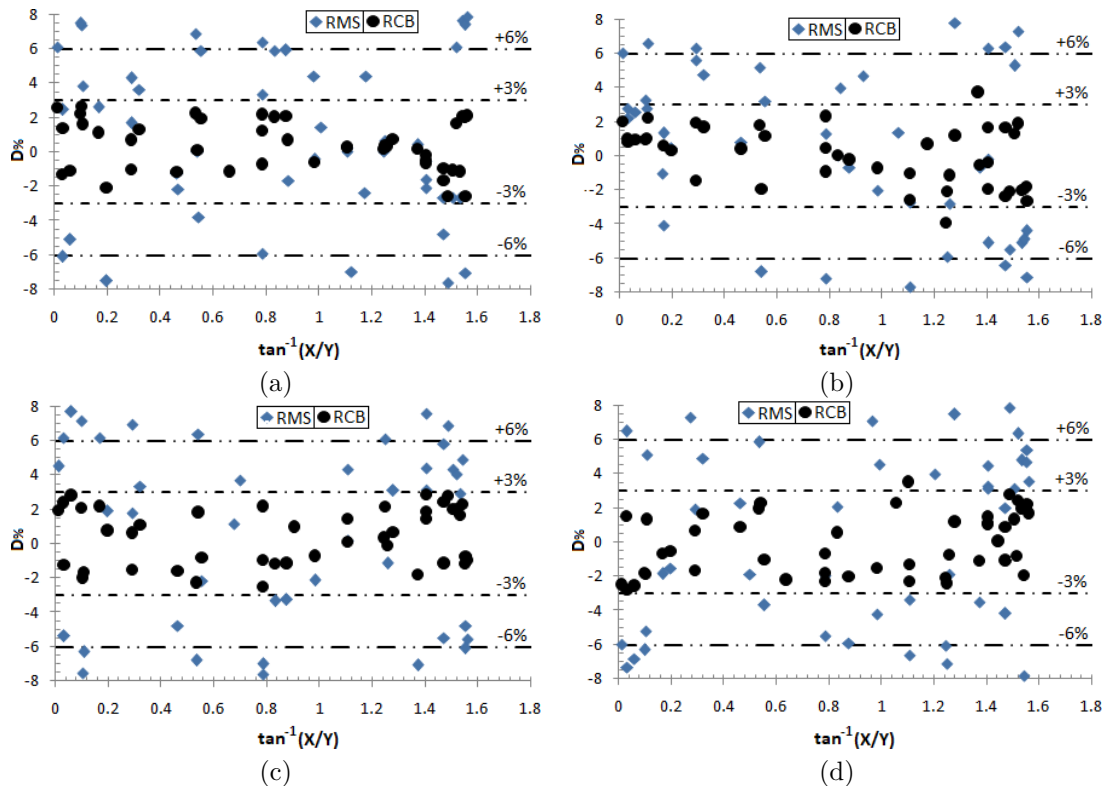
$$\text{Caso 7 } f_{(8)} = 2f_{(1)} \cdot \{(0.015^2 - 0.108Y + 0.08)\psi^2 + (-0.015Y^2 + 0.096Y + 0.048)\psi - 0.001Y^2 + 0.04Y + 0.058\} \quad (32)$$

En la Figura 10 son graficados en bandas de error de $\pm 3\%$ y $\pm 6\%$, los $D\%$ obtenidos con la ecuación (18) para los factores de visión calculados con RMS y RCB para los casos 2 al 7.

Para el caso 2, la Figura 10 muestra que las RCB brindan el mejor ajuste con respecto a la SA, con un error medio de $\pm 3\%$ en el 97.6 % de los puntos (Y; X) analizados. Contrariamente, los factores de visión obtenidos con RMS, producen un menor ajuste con respecto a la SA, con errores medios de $\pm 3\%$

y $\pm 6\%$ en el 28,5 % y 64.3 % de los puntos (Y; X) evaluados, respectivamente.

Para el caso 3, se comprueba en la Figura 10 que las RCB brindan un mejor ajuste con respecto a la SA, con errores medios de $\pm 3\%$ y $\pm 6\%$ en el 92.9 % y 100 % de los puntos (Y; X) analizados, mientras que los factores de visión obtenidos con RMS proporcionan un menor ajuste con respecto a la SA, computando errores medios de $\pm 3\%$ y $\pm 6\%$ en el 38.1 % y 69.0 % de los puntos (Y; X) evaluados, respectivamente.



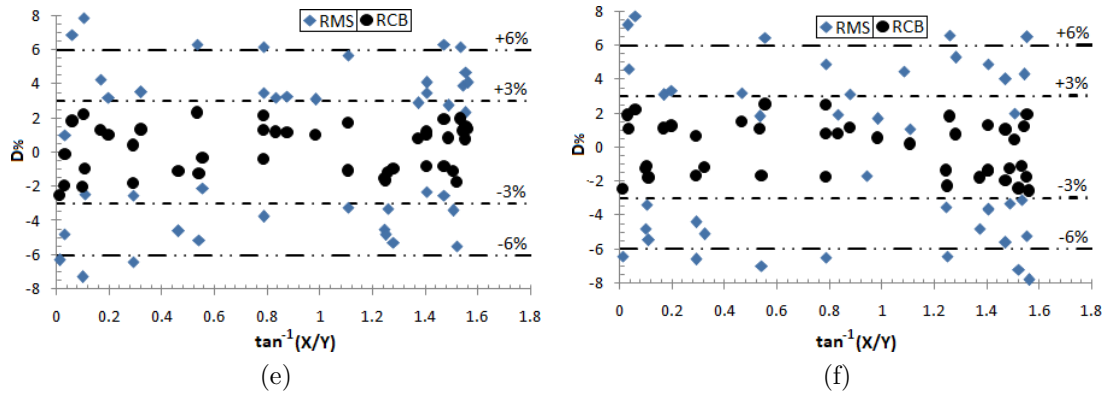


Figura 10. Valores $D\%$ obtenidos con la ecuación (18) para los casos analizados. (a) Caso 2; (b) Caso 3; (c) Caso 4; (d) Caso 5; (e) Caso 6; (f) Caso 7

Para el caso 4, la Figura 10 muestra que las RCB proporcionan un mejor ajuste con respecto a la SA , con errores medios de $\pm 3\%$ y $\pm 6\%$ en el 90.5 % y 100 % de los puntos $(Y; X)$ analizados. Contrariamente, los factores de visión obtenidos con RMS, brindan un menor ajuste con respecto a la SA , con errores medios de $\pm 3\%$ y $\pm 6\%$ en el 21.4 % y 61.9 % de los puntos $(Y; X)$ evaluados, respectivamente.

Para el caso 5, se comprueba en la Figura 10 que las RCB brindan un mejor ajuste con respecto a la SA , con errores medios de $\pm 3\%$ y $\pm 6\%$ en el 95.2 % y 100 % de los puntos $(Y; X)$ analizados, mientras que los factores de visión obtenidos con RMS proporcionan un menor ajuste con respecto a la SA , computando errores medios de $\pm 3\%$ y $\pm 6\%$ en el 26.2 % y 71.4 % de los puntos $(Y; X)$ evaluados, respectivamente.

Para el caso 6, la Figura 10 muestra que las RCB proporcionan un mejor ajuste con respecto a la SA , con errores medios de $\pm 3\%$ en el 100 % de los puntos $(Y; X)$ analizados. Contrariamente, los factores de visión obtenidos con RMS, brindan un menor ajuste con respecto a la SA , con errores medios de $\pm 3\%$

y $\pm 6\%$ en el 31.0 % y 81.0 % de los puntos $(Y; X)$ evaluados, respectivamente.

Para el caso 7, se comprueba en la Figura 10 que las RCB brindan un mejor ajuste con respecto a la SA , con errores medios de $\pm 3\%$ en el 100 % de los puntos $(Y; X)$ analizados, mientras que los factores de visión obtenidos con RMS proporcionan un menor ajuste con respecto a la SA , computando errores medios de $\pm 3\%$ y $\pm 6\%$ en el 23.8 % y 73.8 % de los puntos $(Y; X)$ evaluados, respectivamente.

3.2. Otras configuraciones geométricas

En la Figura 3, las superficies emisora y receptora son divididas en cuatro superficies triangulares, entonces son posibles $0.5n^{n-1} = 0.5 \cdot 4^{4-1} = 32$ combinaciones (véase la Figura 11). Mediante los factores de visión $f_{(1)}$ al $f_{(8)}$ es posible obtener los factores de visión para las restantes configuraciones, aplicando la regla de sumas y el álgebra de factores de forma. En la Tabla 5 son resumidas las relaciones para computar el factor de visión en las configuraciones dadas en la Figura 11.

Tabla 5. Configuración de factores de visión para superficies triangulares

Caso	$F_{(1-2)} \cdots f_{(n)}$	Caso	$F_{(1-2)} \cdots f_{(n)}$
Caso 8	$f_{(9)} = f_{(5)}$	Caso 20	$f_{(21)} = 3f_{(3)} + f_{(8)} - 2f_{(6)} - 2f_{(7)}$
Caso 9	$f_{(10)} = f_{(5)}$	Caso 21	$f_{(22)} = 4f_{(1)} + 3f_{(6)} + 3f_{(7)} - 3f_{(3)} - 2f_{(4)} - 4f_{(5)} - f_{(8)}$
Caso 10	$f_{(11)} = 2f_{(1)} - f_{(2)}$	Caso 22	$f_{(23)} = 4f_{(5)} + f_{(3)} + f_{(8)} - 2f_{(6)} - 2f_{(7)}$
Caso 11	$f_{(12)} = f_{(6)} + f_{(7)}$	Caso 23	$f_{(24)} = 5f_{(3)} + 4f_{(4)} + 5f_{(5)} + f_{(8)} - 4f_{(1)} - 4f_{(2)} - 4f_{(6)} - 4f_{(7)}$
Caso 12	$f_{(13)} = 2f_{(2)} - f_{(5)}$	Caso 24	$f_{(25)} = 2f_{(1)} + f_{(4)} - 2f_{(2)}$
Caso 13	$f_{(14)} = 4f_{(1)} + f_{(5)} - 4f_{(2)}$	Caso 25	$f_{(26)} = 2f_{(1)} + f_{(3)} - 2f_{(2)}$
Caso 14	$f_{(15)} = 2f_{(4)} - f_{(6)} - f_{(7)}$	Caso 26	$f_{(27)} = f_{(2)} - f_{(3)}$
Caso 15	$f_{(16)} = 4f_{(1)} + f_{(6)} + f_{(7)} - 2f_{(3)} - 2f_{(4)}$	Caso 27	$f_{(28)} = f_{(2)} - f_{(4)}$
Caso 16	$f_{(17)} = 2f_{(3)} - f_{(6)} - f_{(7)}$	Caso 28	$f_{(29)} = f_{(5)} - f_{(6)} - f_{(7)}$
Caso 17	$f_{(18)} = f_{(3)} + f_{(8)}$	Caso 29	$f_{(30)} = 2f_{(3)} + 2f_{(4)} + f_{(5)} - 4f_{(2)} - f_{(6)} - f_{(7)}$
Caso 18	$f_{(19)} = f_{(6)} + f_{(7)} - f_{(3)} - f_{(8)}$	Caso 30	$f_{(31)} = 2f_{(2)} + f_{(6)} + f_{(7)} - f_{(5)} - 2f_{(4)}$
Caso 19	$f_{(20)} = 4f_{(5)} + f_{(3)} + f_{(8)} - 2f_{(6)} - 2f_{(7)}$	Caso 31	$f_{(32)} = 2f_{(2)} + f_{(6)} + f_{(7)} - f_{(5)} - 2f_{(3)}$

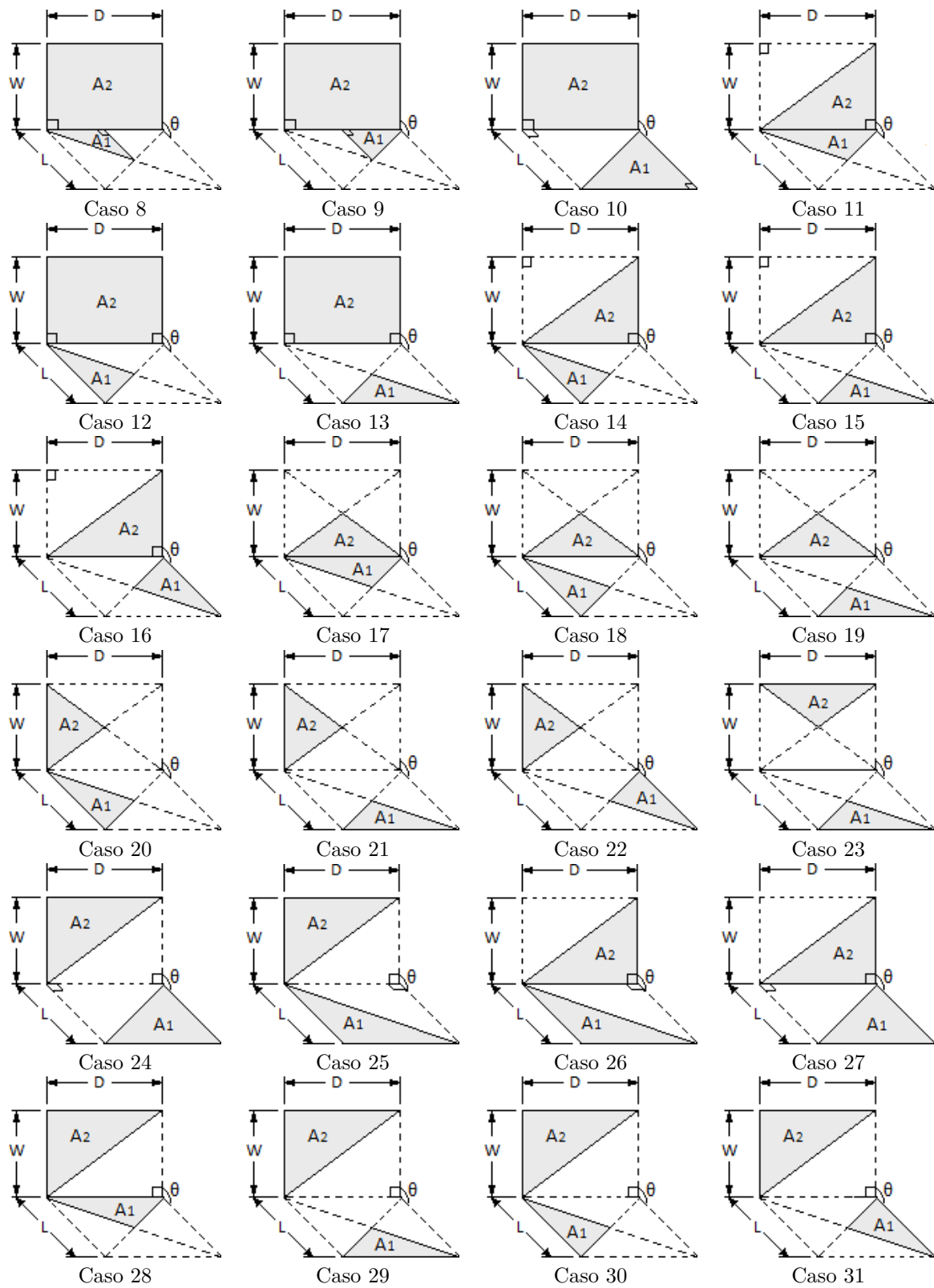


Figura 11. Configuración de factores de visión para superficies triangulares

4. Conclusiones

Fue desarrollado un método aproximado para la determinación del factor de visión en 32 combinaciones de geometrías triangulares con bordes comunes y ángulo θ incluido, situadas en un espacio 3-D.

Para la validación de los modelos propuestos fueron evaluados 42 ejemplos con varias relaciones de aspecto para cada geometría de los ocho casos básicos, comparando los resultados obtenidos mediante la SA, con los arrojados por la RMS con cinco intervalos y los computados por el método propuesto con RCB.

En todos los casos evaluados, la RCB mostró los mejores ajustes, con un error de $\pm 6\%$ en más del 90 % de las muestras, mientras que la RMS mostró una dispersión media de $\pm 6\%$ en el 65 % de los datos. Este elemento confirma la validez de la hipótesis sobre su uso. Para las restantes 24 configuraciones geométricas estudiadas fueron presentadas las relaciones básicas para el cálculo del factor de visión a partir las expresiones obtenidas para los ocho casos básicos. La naturaleza práctica de la contribución y los valores razonables de ajustes obtenidos, permiten considerar a la propuesta como una herramienta adecuada para su uso en la ingeniería térmica y en las tareas de cálculo de la transferencia de calor por radiación.

Dada la ausencia de antecedentes similares en la literatura, el método propuesto refuerza el valor científico y práctico de esta investigación, pudiendo ser incorporadas las soluciones proporcionadas a los catálogos disponibles en la actualidad, para el cálculo de los factores de visión.

Agradecimientos

El autor muestra su agradecimiento por la ayuda y recomendaciones recibidas del profesor Dr. John R. Howell, del Departamento de Ingeniería Mecánica de Universidad de Texas en Austin, y al profesor Dr. Jack H. Lewis, Departamento de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Massachusetts, EUA.

Referencias

- [1] J. R. Howell and M. P. Mengüç, “Radiative transfer configuration factor catalog: A listing of relations for common geometries,” *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 112, no. 5, pp. 910–912, 2011. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2010.10.002>
- [2] Y. F. Nassar, “Analytical-numerical computation of view factor for several arrangements of two rectangular surfaces with non-common edge,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 159, p. 120130, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.120130>
- [3] M. F. Modest and S. Mazumder, “Chapter 4 - View factors,” in *Radiative Heat Transfer (Fourth Edition)*, fourth edition ed., M. F. Modest and S. Mazumder, Eds. Academic Press, 2022, pp. 127–159. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-818143-0.00012-2>
- [4] Y. Camaraza-Medina, A. Hernández-Guerrero, and J. L. Luviano-Ortiz, “Analytical view factor solution for radiant heat transfer between two arbitrary rectangular surfaces,” *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, vol. 147, pp. 14999–15016, 2022. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s10973-022-11646-4>
- [5] Y. Camaraza Medina, *Introducción a la termo-transferencia*. Editorial Universitaria (Cuba), 2020. [Online]. Available: <https://bit.ly/44PcgsO>
- [6] J. R. Howell, *A Catalog of Radiation Configuration Factors*. McGraw-Hill, 1982. [Online]. Available: <https://bit.ly/42qHzIJ>
- [7] J. R. Howell, M. Pinar Menguc, and R. Siegel, *Thermal Radiation Heat Transfer*. CRC Press, 2010. [Online]. Available: <https://bit.ly/42u9jfy>
- [8] M. K. Gupta, K. J. Bumtariya, H. Shukla, P. Patel, and Z. Khan, “Methods for evaluation of radiation view factor: A review,” *Materials Today: Proceedings*, vol. 4, no. 2, Part A, pp. 1236–1243, 2017, 5th International Conference of Materials Processing and Characterization (ICMPC 2016). [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.01.143>
- [9] A. Narayanaswamy, “An analytic expression for radiation view factor between two arbitrarily oriented planar polygons,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 91, pp. 841–847, 2015. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.07.131>
- [10] A. Narayanaswamy and P. Meyappan, “An analytic expression for radiation view factors between two planar triangles with arbitrary orientations,” in *Proceedings of CHT-15. 6th International Symposium on ADVANCES IN COMPUTATIONAL HEAT TRANSFER*, 12 2015, pp. 1545–1550. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1615/ICHMT.2015.IntSympAdvComputHeatTransf.1500>
- [11] R. Sudharshan Reddy, D. Arepally, and A. Datta, “View factor computation and radiation energy analysis in baking oven with obstructions: Analytical and numerical method,” *Journal of Food Process Engineering*,

- vol. 46, p. e14270, 01 2023. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1111/jfpe.14270>
- [12] Y. Zhou, R. Duan, X. Zhu, J. Wu, J. Ma, X. Li, and Q. Wang, “An improved model to calculate radiative heat transfer in hot combustion gases,” *Combustion Theory and Modelling*, vol. 24, no. 5, pp. 829–851, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1080/13647830.2020.1769866> <https://doi.org/10.1080/13647830.2020.1769866>
- [13] X.-J. Yi, L.-Y. Zhong, T.-B. Wang, W.-X. Liu, D.-J. Zhang, T.-B. Yu, Q.-H. Liao, and N.-H. Liu, “Near-field radiative heat transfer between hyperbolic metasurfaces based on black phosphorus,” *The European Physical Journal B*, vol. 92, no. 9, p. 217, Sep 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1140/epjb/e2019-100274-y>
- [14] J. R. Ehlert and T. F. Smith, “View factors for perpendicular and parallel rectangular plates,” *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, vol. 7, no. 1, pp. 173–175, 1993. [Online]. Available: <https://doi.org/10.2514/3.11587>
- [15] C. K. Krishnaprakas, “View factor between inclined rectangles,” *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, vol. 11, no. 3, pp. 480–481, 1997. [Online]. Available: <https://doi.org/10.2514/2.6267>
- [16] H. J. Sauer Jr., “Configuration factors for radiant energy interchange with triangular areas,” *ASHRAE Transactions*, vol. 80, no. 2, pp. 268–279, 1974. [Online]. Available: <https://bit.ly/3I0jXm0>
- [17] Y. Camaraza-Medina, A. A. Sánchez Escalona, O. M. Cruz-Fonticiella, and O. F. García-Morales, “Method for heat transfer calculation on fluid flow in single-phase inside rough pipes,” *Thermal Science and Engineering Progress*, vol. 14, p. 100436, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.tsep.2019.100436>
- [18] W. Boeke and L. Wall, “Radiative exchange factors in rectangular spaces for the determination of mean radiant temperatures,” *Building services engineering*, vol. 43, pp. 244–253, 1976.
- [19] F. F. Sönmez, H. Ziar, O. Isabella, and M. Zeman, “Fast and accurate ray-casting-based view factor estimation method for complex geometries,” *Solar Energy Materials and Solar Cells*, vol. 200, p. 109934, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.solmat.2019.109934>
- [20] S. Francisco, A. Raimundo, A. Gaspar, A. V. Oliveira, and D. Quintela, “Calculation of view factors for complex geometries using Stokes’ theorem,” *Journal of Building Performance Simulation*, vol. 7, pp. 203–216, 05 2014. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1080/19401493.2013.808266>
- [21] S.-A. Biehs, R. Messina, P. S. Venkataram, A. W. Rodríguez, J. C. Cuevas, and P. Ben-Abdallah, “Near-field radiative heat transfer in many-body systems,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 93, p. 025009, Jun 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.93.025009>
- [22] Y. Camaraza-Medina, A. Hernández-Guerrero, and J. L. Luviano-Ortiz, “Experimental study on influence of the temperature and composition in the steels thermo physical properties for heat transfer applications,” *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, vol. 147, no. 21, pp. 11 805–11 821, Nov 2022. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s10973-022-11410-8>
- [23] M. Lakhi and A. Safavinejad, “Numerical investigation of combined force convective-radiative heat transfer in a horizontal channel with Lattice Boltzmann method,” *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, vol. 146, no. 4, pp. 1911–1922, Nov 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s10973-020-10136-9>
- [24] M. Bonnici, P. Mollicone, M. Fenech, and M. A. Azzopardi, “Analytical and numerical models for thermal related design of a new pico-satellite,” *Applied Thermal Engineering*, vol. 159, p. 113908, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2019.113908>
- [25] Y. Camaraza-Medina, “Methods for the determination of the heat transfer coefficient in air cooled condenser used at biomass power plants,” *International Journal of Heat and Technology*, vol. 39, no. 5, pp. 1443–1450, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.18280/ijht.390505>